Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»
Математика. Финальный тур. 2020-2021 учебный год
14 февраля 2021 г.

Общие критерии оценивания

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов.

7 класс

7.1. В четырехзначном числе Петя зачеркнул первую цифру и получил трехзначное число. Затем он разделил исходное число на это трехзначное и получил частное 3, а остаток 8. Чему равно исходное число? (Найдите все возможные числа).

Ответ: 1496 или 2996**.** **Решение**. Пусть x – первая цифра, y – трехзначное число, полученное после зачеркивания первой цифры. Тогда $1000x + y = 3y + 8$, т.е. $500x = y + 4$. Отсюда, учитывая неравенства $0 < y < 1000$, получаем, что x равен либо 1, либо 2. Тогда, соответственно, $y = 496$ или $y = 996$.

7.2. В четырехугольнике $ABCD$, у которого $AB = CD$, проведена диагональ AC. Докажите, что если угол ACB тупой, то угол ADC острый.

Решение. Предположим, от противного, что угол D не острый. Тогда в ΔACD имеем $AC > CD$. Но в ΔABC против тупого угла ACB лежит бóльшая сторона: $AB > AC$. Таким образом, $CD < AC < AB$. Получили противоречие с условием $CD = AB$.

7.3. У Коли семь старинных монет: четыре одинаковых дублона и три одинаковых кроны. Точный вес монет он забыл, но помнит, что дублон весит 5 или 6 грамм, а крона – 7 или 8 грамм. Сможет ли он узнать точный вес монет при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

Ответ: сможет. **Решение.** Первое взвешивание: на левую чашу весов положим все четыре дублона, а на правую – все три кроны. Таким образом, вес монет на левой чаше 20 или 24 грамма, а на правой – 21 или 24 грамма. Если весы в равновесии, то вес монет однозначно определяется: дублон весит 6 грамм, а крона – 8 грамм. Если левая чаша перевесила, то это означает, что вес монет на ней 24 грамма, в то время, как на правой – 21 грамм, т.е. тоже однозначно определен вес монет: дублон весит 6 грамм, а крона – 7 грамм. Если же перевесила правая чаша, то однозначно определен только вес дублона (он весит 5 грамм), а вес кроны пока не известен, и вторым взвешиванием мы его узнаем. Для этого на левую чашу положим три дублона, а на правую – две кроны. Тогда вес на левой чаше 15 грамм, а на правой – 14 или 16 грамм. Поэтому в случае, когда перевесит левая чаша, вес кроны 7 грамм, а в противном случае – 8 грамм.

7.4. Клетчатый прямоугольник со стороной клетки 1см и площадью 2021 см^2 двумя перпендикулярными разрезами вдоль линий сетки разрезали на четыре прямоугольные части. Докажите, что хотя бы у одной из частей площадь не менее 528 см^2.

Решение. Простые делители числа 2021 – это 43 и 47, причем $2021 = 43 \cdot 47$. Поэтому целые стороны a и b исходного прямоугольника могут быть либо 1) $a = 2021$, $b = 1$, либо 2) $a = 47$, $b = 43$. Но, очевидно, случай 1) $a = 2021$, $b = 1$ невозможен, т.к. такой прямоугольник невозможно разрезать на клетчатые прямоугольники. Во втором случае самая большая из четырех частей будет иметь площадь не меньше $24 \cdot 22 = 528$.

7.5. Вдоль окружности записали в некотором порядке 25 чисел: 1, 2, …, 25. Могло ли оказаться так, что любые два соседних числа отличаются либо на 10, либо в несколько (целое число) раз?

Ответ: не могло. **Решение.** Предположим, от противного, что расставить числа можно, и рассмотрим три самых больших простых числа, меньших 25, а именно 17, 19 и 23. Пусть n – любое из этих трех чисел. Поскольку $n + 10 > 25$ и $2n > 25$, то соседними с n двумя числами на окружности могут быть только $n - 10$ и единица. Таким образом, единица должна быть соседом сразу трех чисел, что, очевидно, невозможно.

8 класс

8.1. В четырехзначном числе Петя зачеркнул первую цифру и получил трехзначное число. Затем он разделил исходное числа на это трехзначное и получил частное 3, а остаток 8. Чему равно исходное число? (Найдите все возможные числа).

Ответ: 1496 или 2996**. Решение**. См. задачу 7.1.

8.2. В треугольнике *ABC* угол *A* наибольший. Точки *M* и *N* симметричны вершине *A* относительно биссектрис углов *B* и *C* соответственно. Найдите ∠*A*, если ∠*MAN* = 50°.

Ответ: 80°. **Решение**. Пусть $\angle A=\alpha,\ \angle B=\beta,\ \angle C=\gamma$. Тогда $\angle AMB=90^\circ-\frac{\beta}{2}$, $\angle ANC=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$ (т.к. треугольники *AMB* и *ANC* равнобедренные). Поэтому $\angle MAN=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)-\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\beta+\gamma}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$. Из условия задачи $90^\circ-\frac{\alpha}{2}=50^\circ$, и значит, α = 80°.

8.3. Клетчатый прямоугольник со стороной клетки 1см и площадью 2021 см ^{2} двумя перпендикулярными разрезами вдоль линий сетки разрезали на четыре прямоугольные части. Докажите, что хотя бы у одной из частей площадь не менее 528 см ^{2} .

Решение. См. задачу 7.4.

8.4. Вдоль окружности записали в некотором порядке 25 чисел: 1, 2, …, 25. Могло ли оказаться так, что любые два соседних числа отличаются либо на 10, либо в несколько (целое число) раз?

Ответ: не могло. **Решение.** См. задачу 7.5.

8.5. 25 учеников класса, среди которых *n* мальчиков, сидят за большим круглым столом. Обязательно ли найдутся два мальчика, между которыми (по часовой стрелке) сидят ровно 4 человека, если **а**) *n*=10; **б**) *n*=11?

Ответ: **а**) не обязательно; **б**) обязательно. **Решение.** **а**) Построим пример. Пронумеруем места за столом по часовой стрелке: 1, 2, …, 25. Если 10 мальчиков сидят на местах 1, 2, 3, 4, 5 (первая группа) и 11, 12, 13, 14, 15 (вторая группа), то *по часовой стрелке* между мальчиками одной и той же группы сидит не больше трёх человек, между мальчиками первой и второй группы – не меньше пяти человек, а между мальчиками второй и первой группы – не меньше десяти человек. **б**) Будем считать, что все ученики сидят в вершинах правильного 25-угольника, обозначим их $A_1, A_2, \ldots, A_{25}$. Они представляют собой вершины пяти правильных пятиугольников: первый из них – пятиугольник $A_1\ A_6\ A_{11}\ A_{16}\ A_{21}$, а каждый следующий получается сдвигом на угол $360^\circ/25$ по часовой стрелке (т.е. номера вершин в каждом пятиугольнике дают одинаковые остатки при делении на 5). Поскольку мальчиков 11, а пятиугольников 5, то хотя бы три мальчика будут «вершинами» одного из пятиугольников. Но тогда в этом пятиугольнике из данных трёх вершин хотя бы две будут соседними. А в 25-угольнике эти две вершины и окажутся искомой парой, т.к. между ними (по часовой стрелке) ровно 4 вершины 25-угольника.

9 класс

9.1. Существуют ли такие нецелые числа x, y, что оба числа $5x + 7y$ и $7x + 10y$ целые?

Ответ: Не существуют. **Решение.** Пусть $5x + 7y = m$, $7x + 10y = n$, где m и n – целые. Решим эту систему уравнений, домножив первое уравнение на 10, а второе – на 7. Вычитая полученные уравнения, будем иметь $x = 10m - 7n$, т.е. x - целое число.

9.2. В треугольнике ABC угол A наибольший. Точки M и N симметричны вершине A относительно биссектрис углов B и C соответственно. Найдите $\angle A$, если $\angle MAN = 50°$.

Ответ: 80°. **Решение**. См. задачу 8.2

9.3 Сколько существует прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, у которых один из катетов равен 2021?

Ответ: 4. Решение. Пусть гипотенуза прямоугольного треугольника равна x, один из катетов – y, а другой – 2021. Тогда по теореме Пифагора $x^2 - y^2 = 2021^2$, т.е. $(x - y)\cdot(x + y) = 2021^2$. Учитывая, что $x > y$, имеем: $x + y > x - y > 0$. Так как разложение 2021 на простые множители имеет вид $2021 = 43\cdot 47$, то разложение 2021^2 на простые множители есть $2021^2 = 43^2\cdot 47^2$ и поэтому 2021^2 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел пятью способами:

$2021^2 = 1\cdot(43^2\cdot 47^2) = 43\cdot(43\cdot 47^2) = 47\cdot(43^2\cdot 47) = 43^2\cdot 47^2 = (43\cdot 47)\cdot(43\cdot 47)$.

Поскольку в произведении $(x - y)\cdot(x + y)$ множители различны и второй множитель больше первого, то имеем четыре системы из двух уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 2021^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 43, \\ x + y = 43 \cdot 47^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 47, \\ x + y = 43^2 \cdot 47; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 43^2, \\ x + y = 47^2. \end{cases}$$

При решении каждой из этих систем получаем, очевидно, натуральные x, y (что следует из нечетности правых частей). Следовательно, существует четыре прямоугольных треугольника с целочисленными сторонами, у которых один из катетов равен 2021.

9.4. 25 учеников класса, среди которых n мальчиков, сидят за большим круглым столом. Обязательно ли найдутся два мальчика, между которыми (по часовой стрелке) сидят ровно 4 человека, если **а**) n=10; **б**) n=11?

Ответ: а) не обязательно; **б**) обязательно. **Решение.** См. задачу 8.5.

9.5. Дано 10 чисел: 10, 20, 30,..., 100. С ними можно проделать следующую операцию: выбрать любые три и прибавить к выбранным числам по единице. С полученными 10 числами проделывается та же операция и т.д. Можно ли в результате нескольких операций получить: **а**) все одинаковые числа? **б**) все числа, равные 200?

Ответ: а) можно, **б)** нельзя. **Решение. а)** Покажем, как проделать три операции с числами $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, чтобы в результате нескольких троек операций все числа стали равными. Пусть m – наименьшее, а M – наибольшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Сосчитаем сумму

$$S = (a_1 - m) + (a_2 - m) + \ldots + (a_{10} - m)$$

Если $M = m$, то все числа одинаковые и $S = 0$. Если же $M > m$, то $S > 0$ и мы проделаем следующие три операции, которые S уменьшат на единицу, а значит через несколько таких операций сделают S равным нулю. Эти три операции заключаются в прибавлении по 1 к трем тройкам чисел; если, для определенности, $a_{10} = M$, то эти тройки таковы: $\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_4, a_5, a_6\}, \{a_7, a_8, a_9\}$. В результате этих трех операций все числа, кроме a_{10}, станут больше на 1 и m станет больше на 1, т.е. S уменьшится на 1. **б)** Покажем, что это невозможно. В результате каждой операции сумма чисел увеличивается на 3, значит за n операций она увеличится на $3n$. Вначале эта сумма равнялась $10 + 20 + \ldots + 100 = 550$, т.е. давала остаток 1 при делении на 3. В конце сумма должна равняться 2000, т.е. остаток при делении на 3 должен стать равным 2, что невозможно.

10 класс

10.1. Решите уравнение $(x^4+x+1)(\sqrt[3]{80}-\sqrt[3]{0{,}01})=2(\sqrt[3]{5{,}12}+\sqrt[3]{0{,}03375})$.

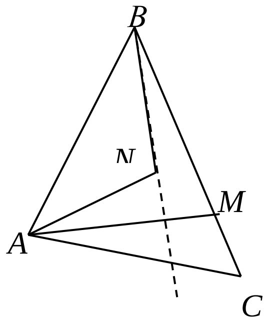
Ответ: $x_1=0$, $x_2=-1$. **Решение**. Умножим обе части уравнения на $\sqrt[3]{100}$, получим $(x^4+x+1)(\sqrt[3]{8000}-\sqrt[3]{1})=2(\sqrt[3]{512}+\sqrt[3]{3{,}375}) \Leftrightarrow 19\cdot(x^4+x+1)=2(8+1{,}5) \Leftrightarrow x^4+x+1=1 \Leftrightarrow$ $x(x^3+1)=0.$ Таким образом, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

10.2. Сколько существует прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, у которых один из катетов равен 2021?

Ответ: 4. Решение. См. задачу 9.3.

10.3. На стороне *BC* треугольника *ABC* взята точка M такая, что $\angle BAM=\angle BCA$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой, проходящей через точку B и перпендикулярной AM.

Решение. На прямой, проходящей через точку *B* и перпендикулярной прямой *AM*, возьмем такую точку *N*, что *AN*=*BN* (она лежит на серединном перпендикуляре к *AB*). Тогда



$\angle NAB = \angle ABN = 90^{\circ} - \angle MAB$, поэтому

$\angle ANB = 180^{\circ} - 2\angle NAB = 2(90^{\circ} - \angle ABN) = 2\angle MAB = 2\angle ACB.$ Отсюда следует, что точка *C* лежит на окружности, проходящей через *A* и *B*, с центром в точке *N*: действительно, для этой окружности $\angle ANB$ – центральный, а $\angle ACB$ – вписанный (если бы точка *C* лежала вне этой окружности, то $\angle ACB$ был бы меньше половины центрального, а если бы точка С была внутри окружности, то $\angle ACB$ был бы больше половины центрального).

10.4. Последовательность целых чисел a_n задается следующим образом: $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$, $a_1=100$. Докажите, что любые два различных члена последовательности взаимно просты.

Решение. Пусть a_n и a_{n+m} – два произвольных члена последовательности ($m > 0$). Докажем, что a_{n+m} можно представить в виде $a_{n+m}= a_n\cdot P_m(a_n)+1$, где $P_m(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Мы докажем этот факт по индукции. Для $m = 1$ имеем $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1=a_n\cdot(a_n-1)+1$, т.е. $P_1(a_n)=a_n-1$. Для $m = 2$ получим $a_{n+2}=a_{n+1}\cdot(a_{n+1}-1)+1=(a_n^2-a_n+1)\cdot a_n\cdot(a_n-1)+1$, т.е. $P_2(a_n)=(a_n-1)\cdot(a_n^2-a_n+1)$. Пусть $a_{n+k} = a_n\cdot P_k(a_n) + 1$ при $m = k$, тогда при $m = k + 1$ будем иметь

$a_{n+k+1} = a_{n+k}\cdot(a_{n+k} - 1) + 1 = (a_n\cdot P_k(a_n) + 1)\cdot a_n\cdot P_k(a_n) + 1$, и значит, многочлен $P_{k+1}(a_n)$ имеет вид $P_{k+1}(a_n) =(a_n\cdot P_k(a_n) + 1)\cdot P_k(a_n)$ и поэтому его коэффициенты целые. Найдем наибольший общий делитель a_n и $a_{n+m} = a_nP_m(a_n) + 1$. Из последнего соотношения следует, что если НОД $(a_n, a_{n+m}) = d$, то и 1 делится на d и следовательно, $d = 1$, то есть a_n и a_{n+m} взаимно просты.

10.5. Дано 10 чисел: 10, 20, 30,..., 100. С ними можно проделать следующую операцию: выбрать любые три и прибавить к выбранным числам по единице. С полученными 10 числами проделывается та же операция и т.д. Можно ли в результате нескольких операций получить: **а**) все одинаковые числа? **б**) все числа, равные 200?

Ответ: а) можно, **б)** нельзя. **Решение.** См. задачу 9.5.

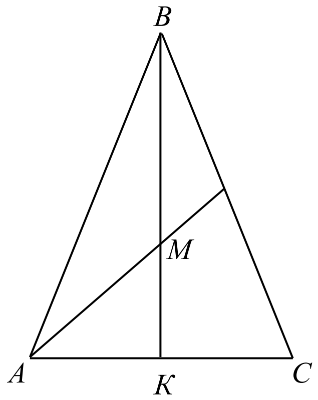
11 класс

11.1. Решите уравнение $(x^4+x+1)(\sqrt[3]{80}-\sqrt[3]{0{,}01})=2(\sqrt[3]{5{,}12}+\sqrt[3]{0{,}03375})$.

Ответ: $x_1=0$, $x_2=-1$. Решение. См. задачу 10.1.

11.2. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Пусть M – точка пересечения медиан. Докажите, что $\angle BAM<2\angle MAC$.

Решение. Пусть BK – медиана равнобедренного треугольника ABC, проведенная к основанию AC, тогда $BK\perp AC$ по свойству равнобедренного треугольника. По свойству точки пересечения медиан, BK:MK = 3:1. Обозначим, $\angle MAK=\alpha$, $\angle BAK=\beta$, Тогда неравенство $\angle BAM<2\angle MAC$ равносильно неравенству $\beta<3\alpha$. Последнее неравенство очевидно в случае, когда $\alpha\geq\frac{\pi}{6}$, т.к. $\beta<\frac{\pi}{2}$. Пусть теперь $\alpha<\frac{\pi}{6}$. Из прямоугольных треугольников ABK и AMK имеем: $\operatorname{tg}\beta=\frac{BK}{AK}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{MK}{AK}$, значит, $\operatorname{tg}\beta=3\operatorname{tg}\alpha$. Так как углы β и 3α лежат в интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, то неравенство $\beta<3\alpha$ равносильно неравенству $\operatorname{tg}\beta<\operatorname{tg}3\alpha$, т.е. $3\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{tg}3\alpha$. Рассмотрим разность



$$\operatorname{tg}3\alpha-3\operatorname{tg}\alpha=(\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}\alpha)-2\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin2\alpha}{\cos3\alpha\cdot\cos\alpha}-\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha}{\cos3\alpha}-\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Так как $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$, то $0<\cos3\alpha<\cos\alpha$ и $\sin\alpha>0$, и значит, $2\sin\alpha(\frac{1}{\cos3\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha})>0$, следовательно, $\operatorname{tg}3\alpha-3\operatorname{tg}\alpha>0$.

11.3 Последовательность целых чисел a_n задается следующим образом: $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$, $a_1=100$. Докажите, что любые два различных члена последовательности взаимно просты.

Решение. См. задачу 10.4.

11.4. У Пети скопилось много кусочков пластилина трех цветов, и он плотно заполнил пластилином полый куб со стороной 5 см, так что в кубе не осталось свободного места. Докажите, что внутри куба найдутся две точки одного цвета на расстоянии ровно 7 см друг от друга.

Решение. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рассмотрим 4 вершины A, C, B_1, D_1. Они являются вершинами правильного тетраэдра со стороной $a\sqrt{2}$, где a = 5 – ребро куба. Поскольку $5\sqrt{2}>7$, рассмотрим подобный тетраэдр с коэффициентом подобия k=$\frac{7}{5\sqrt{2}}$, т.е. проделаем гомотетию с центром в центре куба и данным коэффициентом подобия. Получим четыре вершины нового тетраэдра внутри куба. Поскольку цветов у пластилина три, хотя бы две вершины этого тетраэдра будут одного цвета.

11.5. Существует ли такой многочлен десятой степени, принимающий целые значения при всех целых аргументах, у которого старший коэффициент не превосходит по абсолютной величине 10^{-6}?

Ответ. Существует. **Решение.** Примером такого многочлена, является $P(x)=\frac{1}{10!}x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-9)$. Покажем, что этот многочлен удовлетворяет условию задачи. Его старший коэффициент равен 1/(10!). Проверим, что 1/(10!)< 10^{-6}, т.е. 9! > 10^5. Действительно, 9! = $2^7\cdot3^4\cdot5\cdot7=2^5\cdot6\cdot6\cdot5\cdot7\cdot9>2^5\cdot5^5=10^5$. Для того, чтобы доказать тот факт, что этот многочлен принимает целочисленные значения при всех целых x, заметим, что при всех натуральных $x\geq10$ число $\frac{1}{10!}x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-9)$ есть не что иное, как C_x^{10}, т.е. число сочетаний из x по 10 (или 10-й биномиальный коэффициент в биноме Ньютона $(a+b)^x$) и значит, это число натуральное. При неотрицательных целых $x\leq9$, очевидно, $P(0)=P(1)=\ldots=P(9)=0$, а при отрицательных целых $x=-n$ легко проверить, что $P(-n)=P(n+9)$ и поэтому это тоже целое (даже натуральное) число.