Олимпиада "Будущие исследователи – будущее науки"

Математика. Финальный тур 2021-22 уч.г.

Каждая задача – 20 баллов, максимум 100 баллов.

7 класс

7.1. Натуральное число n умножили на сумму цифр числа $3n$ и полученное число ещё умножили на 2. В результате получили 2022. Найдите n.

__Ответ__: 337. **__Решение.__** Пусть $s(N)$ обозначает сумму цифр числа N. Тогда условие задачи запишется в виде $2n\cdot s(3n)=2\cdot 3\cdot 337$, т.е. $n\cdot s(3n)=3\cdot 337=1011$. Значит, $n\le 1011$, поэтому $3n$ не более, чем четырехзначное число, и $s(3n)<4\cdot 9=36$. Таким образом, $s(3n)$ не может равняться 337, а должно равняться либо 3 либо 1. Но очевидно, что равенство $s(3n)=1$ приводит к противоречию (в этом случае $3n$ было бы степенью десятки). Значит $s(3n)=3$, $n=337$. Проверка подтверждает такое решение, т.к. $3n=1011$.

7.2. Пусть a – количество шестизначных чисел, делящихся на 13, но не делящихся на 17, и b – количество шестизначных чисел, делящихся на 17, но не делящихся на 13.
Найдите $a - b$.

__Ответ__: 16290. **__Решение.__** Пусть c — количество шестизначных чисел, делящихся одновременно на 13 и 17. Тогда $a + c$ — это количество всех шестизначных чисел, делящихся на 13, и поэтому $a+c=\left[\frac{999999}{13}\right]-\left[\frac{99999}{13}\right]=76923-7692=69231$. ($[x]$ означает целую часть числа x). Аналогично,

$b+c=\left[\frac{999999}{17}\right]-\left[\frac{99999}{17}\right]=58823-5882=52941$. Таким образом, $a-b=(a+c)-(b+c)=$ $=16290$.

7.3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M такая, что $AB = BM$ и $AM = MC$. Известно, что угол B в пять раз больше угла C. Найдите углы треугольника.

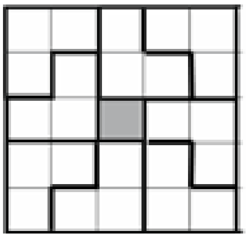
__Ответ.__ $\angle A=60°$, $\angle B=100°$, $\angle C=20°$. **__Решение.__** Треугольники ABM и AMC равнобедренные, поэтому углы при их основаниях равны. Обозначим эти углы x и y соответственно. Тогда по свойству внешнего угла AMB для треугольника AMC имеем $x = 2y$. Отсюда сумма углов A и C равна $x + y + y = 4y = 180° - \angle B$. По условию $\angle B = 5y$ и поэтому $9y = 180°$, значит $y = 20°$. Тогда $\angle A=3y=60°$, $\angle B=5y=100°$.

7.4. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой куб некоторого натурального числа.

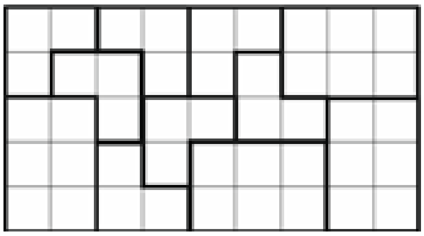
__Ответ:__ 984321. **__Решение.__** Очевидно, среди цифр искомого числа x нет нуля. Произведение всех цифр от 1 до 9 равно $2^7\cdot 3^4\cdot 5^1\cdot 7^1$. Поэтому x не может содержать ни цифру 5, ни цифру 7 (иначе произведение цифр числа x должно было бы делиться на 5^3 или 7^3). Значит, x содержит не более семи оставшихся цифр, и $2^7\cdot 3^4$ делится на произведение цифр числа x. Поскольку $2^7\cdot 3^4$ не является кубом натурального числа, x не может содержать все эти семь цифр.Если мы удалим цифру 6, то оставшиеся шесть цифр дадут в произведении $2^6 \cdot 3^3 = 12^3$. Удаление вместо шестерки любой другой цифры, очевидно, не дает произведения, равного кубу натурального числа. А удаление нескольких цифр приводит к числу, состоящему из пяти или менее цифр. Значит, x состоит из цифр 1, 2, 3, 4, 8, 9, и требование максимальности приводит к результату: $x = 984\,321$.

7.5. Какое наибольшее количество трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого прямоугольника размера: **а**) 5×10 клеток; **б**) 5×9 клеток?

Ответ: **а**) 16; **б**) 15. **Решение.** **а)** Очевидно, что можно вырезать не более 16 уголков, так как в



противном случае прямоугольник должен содержать не менее 17·3=51>50 клеток. На левом рисунке показан пример разрезания одного квадрата 5×5 на 8 уголков и одну (заштрихованную) клетку. Соседний квадрат 5×5



разрезается точно так же. **б)** На правом рисунке см. пример разрезания на 15 уголков (каждый прямоугольник 2×3 здесь очевидно разрезается на два уголка).

8 класс

8.1. Натуральное число n умножили на сумму цифр числа $3n$ и полученное число ещё умножили на 2. В результате получили 2022. Найдите n.

Ответ: 337. **Решение.** См. задачу 7.1

8.2. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M такая, что $AB = BM$ и $AM = MC$. Известно, что угол B в пять раз больше угла C. Найдите углы треугольника.

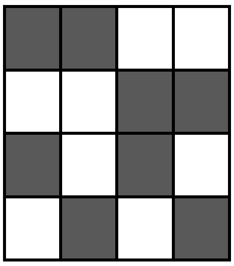
Ответ: $\angle A = 60°$, $\angle B = 100°$, $\angle C = 20°$. **Решение** . См. задачу 7.3

8.3. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой куб некоторого натурального числа.

Ответ: 984321. **Решение.** См. задачу 7.4

8.4. В клетчатом квадрате $n \times n$ каждая клетка окрашена в один из двух цветов: белый или черный. При каком наименьшем n всегда (т.е. при любой окраске) найдется прямоугольник, вершины которого совпадают с центрами четырех одинаково окрашенных клеток?

Ответ: $n = 5$. **Решение.** Докажем, что при $n = 5$ (а значит, и при n >5) такой прямоугольник найдется. Рассмотрим нижнюю строку таблицы. В ней есть по меньшей мере 3 клетки одного цвета. Пусть для определённости это будут белые клетки. Тогда рассмотрим три столбца с этими клетками в основании, т.е. мы рассмотрим меньшую таблицу размера 5х3, нижняя строка которой состоит из трех белых клеток. Если в какой-нибудь из четырех оставшихся строк этой меньшей таблицы есть две белые клетки, то искомый «белый»



прямоугольник образован их центрами и центрами соответствующих клеток нижней строки. Пусть теперь в каждой из этих четырех строк есть по меньшей мере две черные клетки. Тогда среди этих четырех строк будет хотя бы две строки с одинаковым расположением черных клеток, т.к. есть только 3 различных расположения двух черных (обозначим ч) клеток, а именно: (чч?), (ч?ч) и (?чч)), а значит их центры образуют «черный» прямоугольник. Пример раскраски квадрата 4×4, для которой нет искомого прямоугольника, см. на рисунке (легко убедиться, что для этого примера нет «одноцветных» прямоугольников даже со сторонами, не параллельными линиям сетки).

8.5. Девочки встали в хоровод, у некоторых надеты платочки. Хоровод назовём правильным, если у каждой девочки без платочка есть соседка в платочке. **а)** Каково минимальное количество платочков в правильном хороводе из 25 девочек? **б)** Докажите, что если в данном правильном хороводе из 25 девочек больше 12 платочков, то некоторые девочки могут снять платочки, а хоровод всё равно останется правильным.

Ответ: **а**) 9. **Решение. а)** Заметим, что у трёх подряд стоящих девочек есть хотя бы один платочек: иначе у стоящей посередине не было бы соседки в платочке. Зафиксируем в хороводе одну девочку в платочке, скажем, Таню, и будем рассматривать последовательно по часовой стрелке по три девочки после Тани. Всего таких троек 8, и в каждой из них есть хотя бы один платочек. Таким образом, всего платочков не меньше 1+8=9, и оценка получена. Теперь построим пример правильного хоровода с 9 платочками: для этого можно надеть платочек Тане, а в каждой из указанных троек – девочке, стоящей посередине. **б)** Пусть в хороводе больше 12 платочков. Зафиксируем теперь девочку без платочка, скажем, Олю (если у всех 25 девочек надеты платочки, то ситуация очевидна: любая может снять свой платочек). Оставшиеся 24 девочки разбиваются на шесть четвёрок, считая после Оли по часовой стрелке. Тогда в какой-то из четвёрок окажется не менее трёх платочков (по принципу Дирихле или рассуждая от противного: иначе всего платочков было бы не более $2\cdot 6=12$). Поэтому из трёх девочек в платочках в этой четвёрке средняя девочка, очевидно, может снять свой платочек и хоровод останется правильным.

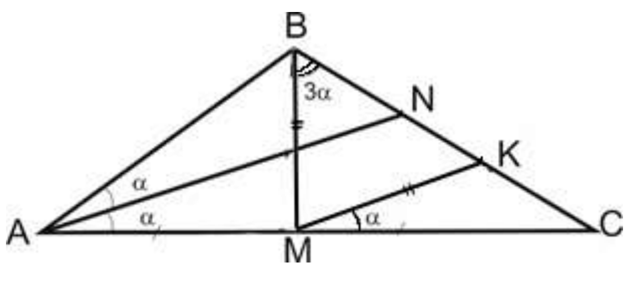
9 класс

9.1. При каких значениях числа a три графика $y = ax + a$, $y = x$ и $y = 2 - 2ax$ пересекаются в одной точке?

Ответ: при $a = 1/2$ и $a = -2$. **Решение.** Задача сводится к решению данных трёх уравнений с тремя неизвестными x, y и a. Подставим выражение для y из второго уравнения $y = x$ в первое и третье уравнение: $\begin{cases} x = ax + a \\ x = 2 - 2ax \end{cases}$. Выразим из первого уравнения системы $a = \dfrac{x}{x+1}$ и подставим во второе. В результате получим квадратное уравнение $x(x + 1) = 2(x + 1) - 2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$. Отсюда $x_{1,2} = (1 \pm 5)/6$. Имеем два решения $x_1 = 1$ и $x_2 = -2/3$. Соответствующие значения a равны $a_1 = 1/2$ и $a_2 = -2$. (*Замечание:* можно не делать проверку, если заметить, что при решении мы домножили уравнение на $(x + 1)$, но среди корней нет $x = -1$).

9.2. В треугольнике ABC медиана BM вдвое меньше биссектрисы AN. Известно, что угол CBM в три раза больше угла CAN. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: $\angle A = \angle C = 36°$, $\angle B = 108°$. **Решение.** Пусть α – угол между биссектрисой AN и сторонами AB и AC. Проведем через точку M прямую, параллельную биссектрисе AN и пусть K – точка пересечения этой прямой со стороной BC. Поскольку M – середина AC, то в треугольнике ANC отрезок MK – это средняя линия. Следовательно,



$MK = \dfrac{1}{2}AN = BM$ (по условию задачи). Таким образом, треугольник BMK равнобедренный и значит, $\angle MKB = \angle MBK = 3\alpha$ (как углы при основании). Угол MKB –

внешний для треугольника MKC , поэтому $\angle MKB = \angle KMC + \angle KCM$, т.е. $3\alpha = \alpha + \angle KCM$. Отсюда $\angle KCM = 2\alpha = \angle BAC$. Итак, мы получаем, что треугольник ABC равнобедренный и тогда медиана BM является высотой, т.е. треугольник BMC – прямоугольный, а сумма его острых углов $3\alpha + 2\alpha = 90° \Leftrightarrow \alpha = 18°$. В результате получаем: $\angle A = \angle C = 2\alpha = 36°$, $\angle B = 2\cdot 3\alpha = 108°$.

9.3. Для натурального числа n обозначим через $T(n)$ произведение всех его натуральных делителей (включая n). **а)** Вычислите $T(2022)$. **б)** Существует ли простое число p и натуральное число n такие, что $T(n) = p^{2022}$?

Ответ: **а**) 2022^4; **б**) не существует. **Решение.** **а**) Разложим 2022 на простые множители: $2022 = 2\cdot 3\cdot 337$. Каждый четный делитель этого числа имеет вид $2\cdot 3^a\cdot 337^b$, где показатели a, b принимают два значения 0 или 1. Количество таких упорядоченных пар (a,b) равно $4 = 2\cdot 2$. Итак, имеется ровно 4 четных делителя, и поэтому в произведение двойка войдет в четвертой степени. Аналогично, остальные простые делители 3 и 337 войдут в произведение в четвёртой степени. Таким образом, $T(2022) = 2^4\cdot 3^4\cdot 337^4 = (2022)^4$. **б**) Поскольку p – простое число, а $T(n)$ есть степень числа p, то n не имеет простых делителей, отличных от p. Пусть $n = p^y$ для некоторого натурального числа y. Тогда $T(p^y) = 1\cdot p^1\cdot p^2\cdot \ldots \cdot p^y = p^{1+2+\ldots+y}$. Отсюда $(1+2+3+\ldots+y) = 2022$. Таким образом, требуется решить в натуральных числах квадратное уравнение $\dfrac{y(y+1)}{2} = 2022 \Leftrightarrow y^2 + y - 4044 = 0$. Дискриминант полученного квдратного уравнения равен 16177, это число не является точным квадратом (т.к. оканчивается на семёрку). Значит, искомого n не существует.

9.4. В клетчатом квадрате $n \times n$ каждая клетка окрашена в один из двух цветов: белый или черный. При каком наименьшем n всегда (т.е. при любой окраске) найдется прямоугольник, вершины которого совпадают с центрами четырех одинаково окрашенных клеток?

Ответ: $n = 5$. **Решение.** См. задачу 8.4.

9.5. Девочки встали в хоровод, у некоторых надеты платочки. Хоровод назовём правильным, если у каждой девочки без платочка есть соседка в платочке. **а)** Каково минимальное количество платочков в правильном хороводе из 25 девочек? **б)** Докажите, что если в данном правильном хороводе из 25 девочек больше 12 платочков, то некоторые девочки могут снять платочки, а хоровод всё равно останется правильным.

Ответ: **а**) 9. **Решение.** См. задачу 8.5.

10 класс

10.1. При каких значениях числа a три графика $y = ax + a$, $y = x$ и $y = 2 - 2ax$ пересекаются в одной точке?

Ответ: при $a = 1/2$ и $a = -2$. **Решение.** См. задачу **9.**1.

10.2. В треугольнике ABC медиана BM вдвое меньше биссектрисы AN. Известно, что угол CBM в три раза больше угла CAN. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: $\angle A = \angle C = 36°$, $\angle B = 108°$. **Решение.** См. задачу 9.2.

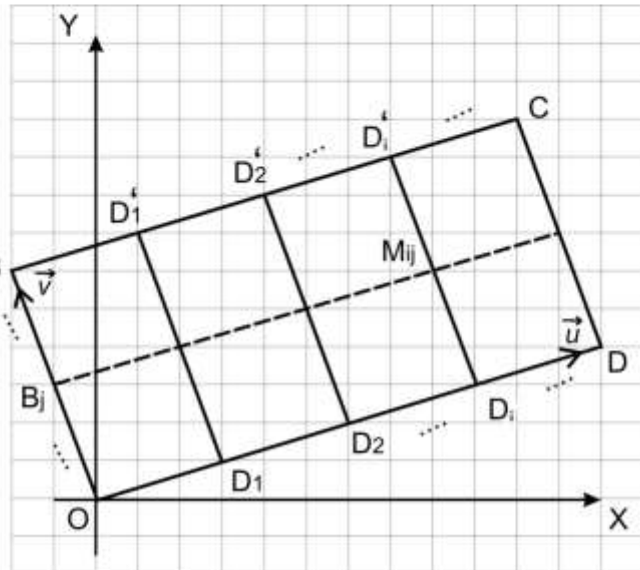
10.3. Докажите неравенство $\sqrt{x^3+y} + \sqrt{y^3+x} \ge \sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y}$.

Решение. Сначала исследуем ОДЗ переменных. Поскольку $x^3 + x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) \geq 0$, то $x \geq 0$. Аналогично, $y \geq 0$. Таким образом, для неотрицательных x, y обе части неравенства имеют смысл и неотрицательны. Поэтому возведение в квадрат обеих частей приводит к равносильному неравенству, которое, (после сокращения) запишется так: $\sqrt{x^3y^3 + xy + x^4 + y^4} \geq \sqrt{x^3y^3 + xy + xy^3 + x^4y}$. После возведения в квадрат и уничтожения подобных членов оно примет вид:
$x^4 + y^4 - xy^3 - x^3y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3(x - y) - y^3(x - y) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - y)(x^3 - y^3) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x - y)^2(x^2 + xy + y^2) \geq 0$. Первый множитель $(x - y)^2 \geq 0$ при всех x, y. Второй множитель $(x^2 + xy + y^2) \geq 0$ тоже всегда неотрицателен, т.к. $x \geq 0$, $y \geq 0$ (или в силу отрицательности дискриминанта $D(y) = y^2 - 4y^2 = -3y^2$ этого квадратного трехчлена переменной x со старшим коэффициент 1).

10.4. Докажите, что существует бесконечное множество троек натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих соотношению $x^2 + y^2 = z^{2022}$.

Решение. Возьмем пифагорову тройку, например, (3; 4; 5), и будем рассматривать соотношения $(3t)^2 + (4t)^2 = (5t)^2$ для различных натуральных t. Если положить $x^2 = 9t^2, y^2 = 16t^2, z^{2022} = 25t^2$, то взяв число z, делящееся на 5, т.е. $z = 5n$ для натурального n, получим $25t^2 = 5^{2022}n^{2022} \Leftrightarrow t = 5^{1010}n^{1011}$. Таким образом, при любом натуральном n числа вида $x = 3t$, $y = 4t$, где $t = 5^{1010}n^{1011}$, и $z = 5n$ удовлетворяют исходному уравнению.

10.5. На координатной плоскости дан прямоугольник с целочисленными координатами вершин, отличный от квадрата. Докажите, что можно провести несколько прямых, параллельных сторонам прямоугольника, так, что прямоугольник разобьется на квадраты с целочисленными координатами вершин.



Решение. Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник. Без ограничения общности можно считать, что $A = O$ – начало координат: иначе сместим начало координат в точку A, а в конце сделаем сдвиг на целочисленный вектор $\overrightarrow{AO}$. Обозначим векторы $\vec{u} = \overrightarrow{OD} = (p;\ q)$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB} = (m;\ n)$, где p, q, m, n – целые числа. Поскольку $\vec{u}$ и $\vec{v}$ взаимно перпендикулярны, их скалярное произведение равно 0, т.е. $pm + qn = 0$ (этот факт также следует из соотношения для угловых коэффициентов перпендикулярных прямых OB и OD). Рассмотрим сначала случай, когда p и q не взаимно просты. Тогда $p = p_1k$, $q = q_1k$, k = НОД$(p, q) > 1$. В этом случае рассмотрим на стороне OD промежуточные точки $D_1, D_2, ..., D_{k-1}$, где $\overrightarrow{OD_i} = (p_1i;\ q_1i)$, $i = 1, 2, \ldots, k - 1$. Проведём через точки D_i прямые, параллельные стороне OB. Они пересекут сторону BC в точках D_i', где $\overrightarrow{OD_i'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD_i'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD_i} = (m + p_1i;\ n + q_1i)$. Таким образом, точки D_i и D_i' имеют целочисленные координаты и тем самым, прямые D_iD_i' ($i = 1, 2, ..., k - 1$) разбивают прямоугольник $OBCD$ на k прямоугольников с целочисленными вершинами. Назовем это разбиением первого типа. Аналогично, если m и n не взаимно просты, то прямыми, параллельными стороне OD, разобьем $OBCD$ на меньшие прямоугольники с целочисленными вершинами. Назовем это разбиением второго типа; прямые этого разбиения проходят через промежуточные точки B_j на стороне OB, где j =

1, 2, ..., $l - 1$, а l – наибольший общий делитель m и n, ($m = m_1 l$, $n = n_1 l$), $\overrightarrow{OB_j} = (m_1 j;\ n_1 j)$. Заметим, что в случае, когда одновременно $k > 1$ и $l > 1$, прямые первого и второго разбиений разбивают прямоугольник $OBCD$ на $k \cdot l$ равных прямоугольников с вершинами в точках M_{ij}, где $\overrightarrow{OM_{ij}} = \overrightarrow{OD_i} + \overrightarrow{OB_j} = (p_1 i + m_1 j;\ q_1 i + n_1 j)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, l$, т.е. все вершины имеют целочисленные координаты. Итак, приходим к случаю, когда координаты каждого из векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$ взаимно просты. Но тогда из равенства $pm = -qn$ получим, что $p = \pm n$, $q = \pm m$ (действительно, из этого равенства следует, что p делится на n и, в то же время, n делится на p, значит, $p = \pm n$; аналогично, $q = \pm m$, с учетом знака в данном равенстве). В этом случае стороны прямоугольника $OBCD$ равны: $|OC| = \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{n^2 + m^2} = |OB|$, и наш прямоугольник – квадрат.

11 класс

11.1. Решите неравенство $f(f(x)) < (f(x))^2$, где $f(x) = 2x^2 - 1$.

Ответ: $x \in (-1;0) \cup (0;1)$. **Решение.** Пусть $y = 2x^2 - 1$. Тогда

$$2y^2 - 1 < y^2 \Leftrightarrow -1 < y < 1 \Leftrightarrow 0 < 2x^2 < 2 \Leftrightarrow 0 < |x| < 1.$$

11.2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = (\arcsin x)\cdot(\arccos x)$.

Ответ: наибольшее значение $= \pi^2/16$ (при $x = \sqrt{2}/2$), наименьшее значение $= -\pi^2/2$ (при $x = -1$). **Решение.** Значения $\arcsin x$ и $\arccos x$ при любом $x \in [-1; 1]$, как известно, связаны соотношением $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$. Таким образом, требуется исследовать функцию $y(t) = t(\pi/2 - t)$, где $t = \arcsin x \in [-\pi/2; \pi/2]$. Данная квадратичная функция с отрицательным старшим коэффициентом принимает наибольшее значение в точке $t = \pi/4$ (вершине параболы), равное $\pi^2/16$. Наименьшее значение принимается на границе промежутка $[-\pi/2; \pi/2]$, а именно, в точке $t = -\pi/2$ и оно равно $-\pi^2/2$ (на другом конце промежутка, при $t = \pi/2$, значение равно нулю). Соответствующие значения x, в которых достигаются наибольшее и наименьшее значения функции, таковы: $x = \sqrt{2}/2$ и $x = -1$.

11.3. Числа x, y удовлетворяют уравнению $\sqrt{x^3 + y} + \sqrt{y^3 + x} = \sqrt{x^3 + x} + \sqrt{y^3 + y}$. Можно ли утверждать, что $x = y$?

Ответ: можно. **Решение**. См. решение задачи 10.3: всюду вместо неравенств нужно рассматривать равенства, и тогда исходное уравнение приводится к уравнению $(x - y)^2(x^2 + xy + y^2) = 0$. Первый множитель обращается в 0 (только) при $x = y$, а второй – при $x = y = 0$.

11.4. Докажите, что существует бесконечное множество троек натуральных чисел x, y, z, удовлетворяющих соотношению $x^2 + y^2 = z^{2022}$.

Решение. См. задачу 10.4.

11.5. На координатной плоскости дан прямоугольник с целочисленными координатами вершин, отличный от квадрата. Докажите, что можно провести несколько прямых, параллельных сторонам прямоугольника, так, что прямоугольник разобьется на квадраты с целочисленными координатами вершин.

Решение. См. задачу 10.5.