“Будущие исследователи — будущее науки 2011”
Математика. 9 класс. Заочный этап.

1. **Средний возраст одиннадцати футболистов — 22 года. Во время игры один из игроков получил травму и ушел с поля. Средний возраст оставшихся футболистов стал 21 год. Сколько лет футболисту, ушедшему с поля?**

   Сумма возрастов всех футболистов — $22 \cdot 11 = 242$, а оставшихся десяти — $21 \cdot 10 = 210$. Значит возраст ушедшего футболиста $242 - 210 = 32$ года.

   Ответ: 32 года.

2. **Найдите сумму:** $86^2 - 85^2 + 84^2 - 83^2 + \ldots - 3^2 + 2^2 - 1^2$**.**

   Преобразовав выражение по формуле разности квадратов получим: $(86 - 85)(85 + 85) + (84 - 83)(84 + 83) + \ldots (4 - 3)(4 + 3) + (2 - 1)(2 + 1) = 86 + 85 + 84 + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{86+1}{2}86 = 3741$.

   Ответ: 3741.

3. **Решите уравнение:** $(x + 2)^4 + x^4 = 82$**.**

   Сделаем замену $y = x + 1$, тогда уравнение принимает вид $(y + 1)^4 + (y - 1)^4 = 82$. Раскрыв скобки, получим биквадратное уравнение $2y^4+12y^2+2 = 82$. Решая его относительно y^2 получим $y^2 = -3 \pm 7$. Вариант с “-” не подходит, т.к. квадрат больше нуля, значит $y = \pm\sqrt{-3 + 7} = \pm 2$. Откуда $x = 1$ или $x = 3$.

   Ответ: 1; 3.

4. **Найдите трехзначное число, цифры которого образуют (в том порядке, в каком они стоят в числе) возрастающую арифметическую прогрессию и которое делится на 45.**

   Число делится на 45 тогда и только тогда, когда оно делится на 5 и на 9. Значит наше число должно оканчиваться на 0 или на 5 и иметь сумму цифр кратную 9. На 0 число не моет оканчиваться, т.к. тогда его цифры не смогут образовывать возрастающую последовательность. Значит последняя цифра 5. Значит, чтобы цифры образовывали возрастающую арифметическую прогрессию число должно быть либо 135, либо 345. Первое делится на 9, а второе — нет.

   Ответ: 135.

5. **В равнобокой трапеции диагональ перпендикулярна боковой стороне и является биссектрисой одного из углов трапеции. В каком отношении делится каждая диагональ точкой их пересечения?**

   Пусть нам дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AB \parallel BC$), $AC \perp AD$, $\angle DCA = \angle BCA$. Обозначим точку пересечения диагоналей через O. Т.к. трапеция равнобокая, то $AD = BC$, $\angle ADC = \angle DCB$, $AC = BD$, $BD \perp BC$, $\angle ADB = \angle CDB$. Отсюда получаем следующее равенство углов: $\angle CAB = \angle DBA = \angle ADB = \angle CDB = \angle DCA = \angle BCA = \alpha$. Из того, что сумма углов трапеции равна 360° получаем $90^\circ + 90^\circ + 6\alpha = 360^\circ$. Значит $\alpha = 30^\circ$.

   Рассмотрим $\triangle DOC$. У него два угла равны α, значит он равнобедренный, т.е. $DO = CO$. Рассмотрим $\triangle AOD$. Он прямоугольный и один угол равен 30° (следовательно другой — 60°). Значит $\frac{AO}{OD} = \frac{1}{2} = \frac{AO}{OC}$.

   Ответ: диагонали делятся в отношении $1 : 2$.

6. **Найдите такие** a **и** b**, чтобы многочлен** $x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$ **был полным квадратом.**

   Нам нужно найти такие a и b, чтобы нашлись c и d, чтобы выполнялось равенство $x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b = (x^2 + cx + d)^2$. Раскрыв скобки в правой части и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x получим систему:

$$\begin{cases} 1 = 2c, \ // \text{ равенство коэффициентов при } x^3 \\ 2 = 2d + c^2, \ // \text{ равенство коэффициентов при } x^2 \\ a = 2cd, \ // \text{ равенство коэффициентов при } x \\ b = d^2, \ // \text{ равенство коэффициентов при } x^0 \end{cases}$$

Из этих равенств последовательно получаем: $c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{7}{8}$, $a = \frac{7}{8}$, $b = \frac{49}{64}$.

Ответ: $a = \frac{7}{8}$, $b = \frac{49}{64}$.

7. **Из пункта А в пункт Б автомобиль доехал за 5 часов, двигаясь в пределах населенных пунктов со скоростью 60 км/ч, а по шоссе вне населенных пунктов — со скоростью 80 км/ч. Обратный путь из Б в А занял 4 часа 36 минут. При этом в пределах населенных пунктов автомобиль двигался со скоростью 50 км/ч, а по шоссе — 90 км/ч. Каково расстояние между пунктами А и Б?**

Обозначим через x км длину пути вне населенных пунктов, а через y км — в пределах населенных пунктов. Тогда нам нужно найти $x + y$. Составим систему:

$$\left\{\begin{array}{l} 5 = \frac{y}{60} + \frac{x}{80} \\ 4,6 = \frac{y}{50} + \frac{x}{90} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1200 = 4y + 3x \\ 2070 = 9y + 5x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 300 - \frac{3}{4}x \\ 2070 = 2700 - \frac{7}{4}x \end{array}\right.$$

Отсюда $x = 360$ км, а $y = 30$ км.

Ответ: 390 км.

8. **В треугольнике ABC проведены отрезки AK, AL, BM, BN так, что $BK = CL = k \cdot BC$, $AM = CN = k \cdot AC$. Известно, что площадь четырехугольника, образующегося при пересечении AK, AL, BM, BN, равна половине площади ABC. Найдите k.**

Пусть $AK \cap BN = T$, $AK \cap BM = Y$, $AL \cap BN = X$ и $AL \cap BM = Z$. Будем считать, что площадь треугольника $S_{ABC} = 1$.

Из теоремы Чевы следует, что точки C, X и Y лежат на одной прямой, причем эта прямая является медианой CD.

Из теоремы Ван Обеля следует, что $\frac{CX}{CD} = \frac{2k}{k+1}$. Следовательно $S_{ABX} = \frac{1-k}{1+k}$.

Из этой же теоремы получаем, что $\frac{CY}{CD} = \frac{2-2k}{2-k}$, значит $S_{ABY} = \frac{k}{2-k}$

Так как XD — медиана треугольника ABX, то $S_{ADX} = S_{BDX} = \frac{1-k}{2+2k}$. А отсюда получаем, что $S_{AYX} = S_{BYX} = \frac{1}{2}(S_{ABX} - S_{ABY})$.

Используя теоремы Чевы и Ван Обеля получаем, что $\frac{ZX}{AX} = \frac{TX}{BX} = \frac{(k+1)^3(1-k)}{3k^2+k+(k+1)^2(1-k)} - k$.

Значит, $S_{ZXTY} = S_{ZXY} + S_{TXY} = \frac{ZX}{AX}S_{AXY} + \frac{TX}{BX}S_{BXY} = \frac{ZX}{AX}(S_{ABX} - S_{ABY})$. Отсюда получается уравнение на параметр k

$$\left(\frac{(k+1)^3(1-k)}{3k^2 + k + (k+1)^2(1-k)} - k\right)\left(\frac{1-k}{1+k} - \frac{k}{2-k}\right) = \frac{1}{2}.$$

Все корни этого уравнения, удовлетворяющие соотношению $0 < k < 1$ нам подходят.

“Будущие исследователи — будущее науки 2011”
Математика. 10 класс. Заочный этап.

1. **Решите уравнение $\sqrt{x^2-49}(x+5)=0$.**

   Из равенства нулю произведения заключаем что один из множителей обязательно равен нулю. Значит либо $x^2-49=0$ либо $x+5=0$. Т.е. возможные варианты для x: -7, 7, -5. Однако -5 не удовлетворяет ОДЗ.

   Ответ: -7; 7.

2. **Известно, что для некоторых чисел a и b верно $a+b=1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения a^3+b^3+3ab.**

   Преобразуем выражение: $a^3+b^3+3ab=a^3+b^3+3ab\cdot 1=a^3+b^3+3ab(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3=1$.

   Ответ: 1.

3. **Решите неравенство**
$$\frac{3|x|-11}{x-3}>\frac{3x+14}{6-x}.$$

   При $x\geq 0$ неравенство равносильно $\frac{24x-6x^2-24}{(x-3)(6-x)}>0$. Решая его методом интервалов получим $x\in[0;2)\cup(2;3)\cup(6;+\infty)$.

   При $x<0$ неравенство равносильно $\frac{-12x-24}{(x-3)(6-x)}>0$. Его решение: $x\in(-2;0)$.

   Ответ: $x\in(-2;2)\cup(2;3)\cup(6;+\infty)$

4. **Выясните, существуют ли такие натуральные числа x и y, что**
   а) $x^2-y^2=2011$**;**
   б) $x^3-y^3=2011$**.**

   а) Да существуют, например $x=1006$, $y=1005$.

   б) Разложим левую часть на множители: $(x-y)(x^2+xy+y^2)=2011$. 2011 — простое число, значит оно делится только на ±1 и ±2011. Т.к. x и y натуральные, то $x^2+xy+y^2>1$, значит $x^2+xy+y^2=2011$. Тогда $x-y=1$. Выразив $x=y+1$ получим $3y^2+3y+1=2011$, что равносильно $y^2+y-670=0$. Однако дискриминант этого уравнения равен 2681 и не является полным квадратом. Значит его корни — иррациональные числа. Следовательно не существует натуральных x и y, удовлетворяющих этому соотношению.

   Ответ: а) да; б) нет.

5. **В параллелограмме лежат две окружности радиуса 1, касающиеся друг друга и трех сторон параллелограмма каждая. Один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания равен $\sqrt{3}$. Найдите площадь параллелограмма.**

   Обозначим вершины параллелограмма $ABCD$, центры окружностей O_1 и O_2. Пусть окружности касаются стороны AD в точках N_1 и N_2 соответсвенно. Точку касания первой окружности со стороной AB обозначим, через M. Нам известно, что $AN_1=AM=\sqrt{3}$.

   Высота параллелограмма, опущенная на сторону AD равна двум радиусам, т.е. 2. Найдем длину стороны AD. Понятно, что $AD=AN_1+N_1N_2+DN_2$. Т.к. $O_1N_1N_2O_2$ прямоугольник, то $N_1N_2=O_1O_2=2$. $DN_2=BM$. Так как AO_1 биссектриса угла A, а BO_1 биссектриса угла B, то $\angle O_1BM=\frac{1}{2}\angle CBM=90^\circ-\frac{1}{2}\angle MAN_1=90^\circ-\angle O_1AN_1=\angle N_1O_1A$. Отсюда заключаем, что треугольники AO_1N_1 и BO_1M подобны по двум углам. Значит $\frac{O_1M}{BM}=\frac{1}{BM}=\frac{AN_1}{O_1N_1}=\sqrt{3}$. Откуда находим $BM=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

   Значит $AD=2+\frac{4}{3}\sqrt{3}$, а площадь параллелограмма равна $S=2\cdot(2+\frac{4}{3}\sqrt{3})=4+\frac{8}{3}\sqrt{3}$.

   Ответ: $4+\frac{8}{3}\sqrt{3}$.

6. **Найдите все значения a, при которых уравнение $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ имеет ровно 4 корня и эти корни образуют арифметическую прогрессию.**

Сделаем замену $y = x^4$. Тогда уравнение принимает вид $y^2 + ay + 1 = 0$. Если его дискриминант $D = a^2 - 4$ отрицателен, то исходное уравнение корней не имеет — этот случай нам не подходит. Если он равен нулю, то уравнение на y имеет один корень, а исходное уравнение на x — два корня. Этот случай тоже нам не подходит. Значит обязательно $D > 0$ и $|a| > 2$. При этом существует два значения y: $y_{1,2} = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$. Если $a \geq 0$, то $\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2} < 0$, а следовательно извлечь корень четвертой степени из одного из y не удастся. Значит при $a \geq 0$ исходное уравнение имеет не более двух корней, что противоречит условию. Следовательно $a < -2$.

При $a < -2$ исходное уравнение имеет ровно четыре корня: $-\sqrt[4]{\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}}$, $-\sqrt[4]{\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}}$, $\sqrt[4]{\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}}$ и $\sqrt[4]{\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}}$. Эти четыре числа образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $\sqrt[4]{\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}} - \sqrt[4]{\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}} = \sqrt[4]{\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}} + \sqrt[4]{\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}}$, что равносильно $\sqrt[4]{\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}} = 3\sqrt[4]{\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}}$. Отсюда получаем $(-a + \sqrt{a^2-4}) = 81(-a - \sqrt{a^2-4})$. Решая это уравнение, получаем, что $a = \pm 9\frac{1}{9}$. Осталось учесть, что $a < -2$.

Ответ: $-9\frac{1}{9}$.

7. **Две бригады землекопов вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса дольше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она могла бы закончить работу на 2 часа раньше. Определить число землекопов в каждой бригаде, если производительность у всех одинакова.**

Пусть в первой бригаде — x землекопов, а во второй — y. Производительность каждого землекопа примем за 1. Время работы первой бригады обозначим через t. Составим систему:

$$\begin{cases} xt = y(t + \frac{1}{2}) \\ xt = (x+5)(t-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 20x - 4xy - 25y = 0 \\ t = \frac{2x+10}{5} \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $y = \frac{4x+20x}{4x+25} = x - \frac{5}{4} + \frac{125}{4(4x+25)}$, т.е. $4y = 4x - 5 + \frac{125}{4x+25}$. Т.к. x и y натуральные числа, то $4x + 25$ является делителем 125. Следовательно, $4x + 25$ может быть равно только 5, 25 или 125. Возможет только вариант $4x + 25 = 125$. Отсюда $x = 25$, $y = 24$.

Ответ: в первой бригаде 25 землекопов, а во второй — 24.

8. **В треугольнике ABC проведены отрезки AK, AL, BM, BN так, что $BK = CL = k \cdot BC$, $AM = CN = k \cdot AC$. Известно, что площадь четырехугольника, образующегося при пересечении AK, AL, BM, BN, равна трети площади ABC. Найдите k.**

Пусть $AK \cap BN = T$, $AK \cap BM = Y$, $AL \cap BN = X$ и $AL \cap BM = Z$. Будем считать, что площадь треугольника $S_{ABC} = 1$.

Из теоремы Чевы следует, что точки C, X и Y лежат на одной прямой, причем эта прямая является медианой CD.

Из теоремы Ван Обеля следует, что $\frac{CX}{CD} = \frac{2k}{k+1}$. Следовательно $S_{ABX} = \frac{1-k}{1+k}$.

Из этой же теоремы получаем, что $\frac{CY}{CD} = \frac{2-2k}{2-k}$, значит $S_{ABY} = \frac{k}{2-k}$

Так как XD — медиана треугольника ABX, то $S_{ADX} = S_{BDX} = \frac{1-k}{2+2k}$. А отсюда получаем, что $S_{AYX} = S_{BYX} = \frac{1}{2}(S_{ABX} - S_{ABY})$.

Используя теоремы Чевы и Ван Обеля получаем, что $\frac{ZX}{AX} = \frac{TX}{BX} = \frac{(k+1)^3(1-k)}{3k^2+k+(k+1)^2(1-k)} - k$.

Значит, $S_{ZXTY} = S_{ZXY} + S_{TXY} = \frac{ZX}{AX}S_{AXY} + \frac{TX}{BX}S_{BXY} = \frac{ZX}{AX}(S_{ABX} - S_{ABY})$. Отсюда получается уравнение на параметр k

$$\left(\frac{(k+1)^3(1-k)}{3k^2+k+(k+1)^2(1-k)} - k\right)\left(\frac{1-k}{1+k} - \frac{k}{2-k}\right) = \frac{1}{3}.$$

Все корни этого уравнения, удовлетворяющие соотношению $0 < k < 1$ нам подходят.

“Будущие исследователи — будущее науки 2011”
Математика. 11 класс. Заочный этап. Вариант 1.

1. **Решите систему уравнений**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xyz, \\ y^2 + z^2 = 2xyz, \\ z^2 + x^2 = 2xyz. \end{cases}$$

Вычтем из 1го уравнения 2е. Получим $x^2 - z^2 = 0$, т.е. $x^2 = z^2$. Аналогично получим $x^2 = y^2$. Значит модули всех чисел равны. Т.к. в левых частях стоят неотрицательные числа, то $2xyz \geq 0$, значит либо все числа неотрицательны, либо среди них ровно два отрицательных. Для случая, когда все числа неотрицательны получим $2x^2 = 2x^3$, т.е. $x = y = z = 0$, либо $x = y = z = 1$. Для случая, когда два числа отрицательны получим еще три ответа: $-x = y = z = 1$, $x = -y = z = 1$, $x = y = -z = 1$.

Ответ: $(0; 0; 0)$, $(1; 1; 1)$, $(-1; 1; 1)$, $(1; -1; 1)$, $(1; 1; -1)$.

2. **Найдите периметр треугольника ABC, если известны координаты его вершин $A(-4, -3)$, $B(2, 5)$ и точки $M(5, 1)$, являющейся серединой стороны BC.**

Пусть $C(x; y)$. Тогда $5 = \frac{2+x}{2}$, $1 = \frac{5+y}{2}$. Значит $x = 8$, $y = -3$.

$AB = \sqrt{(-4-2)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{36+64} = 10.$

$BC = \sqrt{(2-8)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{36+64} = 10.$

$AC = \sqrt{(-4-8)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{144} = 12.$

Ответ: периметр треугольника равен 32.

3. **Решите уравнение: $\sqrt{\sin x} + \cos x = 0$.**

ОДЗ: $\sin x \geq 0$.

Если $\cos x > 0$, то решений нет. Пусть $\cos x < 0$. При этом условии преобразуем наше уравнение к $\sin x = \cos^2 x$, а зетем к $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Решая получившееся квадратное уравнение относительно $\sin x$ получим $\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Если выбрать знак “минус”, то значение получится меньше -1, что не подходит. Значит $\sin x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Откуда $x = (-1)^n \arcsin(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Учтем теперь, что $\cos x < 0$ и получим ответ.

Ответ: $x = \pi - \arcsin(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

4. **Для всех a решите неравенство $ax^2 + x + 1 > 0$.**

Дискриминант уравнения $ax^2 + x + 1 = 0$ равен $D = 1 - 4a$. Понятно, что $D > 0$ при $a < \frac{1}{4}$, $D = 0$ при $a = \frac{1}{4}$, $D < 0$ при $a > \frac{1}{4}$.

Случай 1. $a > \frac{1}{4}$. При этом график параболы лежит выше оси Ox, т.е. исходное неравенство выполнено при всех x.

Случай 2. $a = \frac{1}{4}$. График параболы касается оси Ox. Неравенство верно при $x \in (-\infty, -2) \cup (-2; +\infty)$.

Случай 3. $0 < a < \frac{1}{4}$. Парабола имеет две точки пересечения с осью Ox. Неравенство верно при $x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}) \cup (\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}; +\infty)$.

Случай 4. $a = 0$. График функции в левой части — прямая. Неравенство выполняется при $x \in (-1; +\infty)$.

Случай 5. $a < 0$. Ветви параболы направлены вниз, она имеет две точки пересечения с осью Ox. Решение неравенства в этом случае $x \in (\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}; \frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a})$

5. **Имеются два сплава, состоящих из цинка, меди и олова. Первый сплав содержит 40% олова, второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Сколько кг олова в новом сплаве?**

   Пусть в обоих сплавах доля цинка равна x цинка. Тогда получаем уравнение $150x + 250x = 400 \cdot 0,3$. Отсюда получаем, что $x = 0,3$. Значит олова в первом сплаве $150 \cdot 0,4 = 60$ кг, а во втором $250 \cdot (1 - 0,3 - 0,26) = 110$ кг.

   Ответ: 170 кг.

6. **Найдите $\log_2 \frac{2x}{2^x}$ при условии $|\log_{\sqrt{2}} x^{\frac{x}{2}} - 2\log_2 x| + ||2-x| - |\log_2 x|| \leqslant (x-2)\log_8 x^3$.**

   Сделаем ряд преобразований: $\log_2 \frac{2x}{2^x} = \log_2 2x - \log_2 2^x = 1 + \log_2 x - x$; $\log_{\sqrt{2}} x^{\frac{x}{2}} = x\log_2 x$; $\log_8 x^3 = \log_2 x$.

   Тогда неравенство, которое нам дано, имеет вид $|(x-2)\log_2 x| + ||2-x| - |\log_2 x|| \leqslant (x-2)\log_2 x$. Слева записана сумма модулей, значит она неотрицательна. Значит $(x-2)\log_2 x \geq 0$. Тогда мы можем раскрыть первый модуль в левой части неравенства. После сокращений получим $||2-x| - |\log_2 x|| \leq 0$. Модуль отрицателен быть не может, значит $|x-2| = |\log_2 x|$. Т.к. $(x-2)\log_2 x \geq 0$, то оба модуля раскрываются одинаково, значит $x - 2 = \log_2 x$. Подставим это в выражение, которое надо найти. $1 + \log_2 x - x = 1 + x - 2 - x = -1$.

   Ответ: -1.

7. **При каких значениях параметра p отношение суммы коэффициентов многочлена $(px^2-7)^{18}$ к его свободному члену минимально?**

   Сумма коэффициентов — это значение в единице, а свободный член — значение в нуле. Тогда искомое отношение имеет вид $\frac{(p-7)^{18}}{7^{18}}$. Оно не отрицательно, т.к. представляет собой четную степень некоторого числа. В то же время при $p = 7$ (и только при таком p) оно равно нулю.

   Ответ: $p = 7$.

8. **В тетраэдр $ABCD$ со сторонами $DA = DB = DC = a$ см и $AB = BC = AC = b$ см вписана сфера. Найдите:**
   а) радиус сферы;
   б) площадь треугольника с вершинами в точках касания сферы с гранями DAB, DAC, DBC.

   а) Пусть DH — высота грани DAB. Тогда $DH = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}b^2}$.

   CH — высота грани ABC. Найдем ее длину: $CH = \frac{\sqrt{3}}{2}b$.

   Высота татраэда DM падает в центр грани ABC, т.е. $M \in CH$ и $MH = \frac{1}{3}CH = \frac{\sqrt{3}}{6}b$. Треугольник DMH прямоугольный ($DM \perp MH$), найдем $DM = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}b^2}$.

   Пусть O — центр сферы. Понятно, что $O \in DM$. Точку касания сферы с гранью ABD обозначим через P. Точка P лежит на отрезке DH. Из подобия треугольников DOP и DAM находим

$$r = OP = OM = \frac{\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}b^2}}{\sqrt{12\frac{a^2}{b^2} - 3} + 1}.$$

   б) У нас точка P — точка касания сферы с гранью DAB, обозначим через Q и R точки касания сферы с гранями DBC и DCA соответсвенно. Рассмотрим плоскость (PQR). Она параллельна плоскости (ABC), ее сечение тетраэдра – правильный треугольник XYZ. Причем точки P, Q и R — середины сторон этого треугольника. Значит $S_{PQR} = \frac{1}{4}S_{XYZ}$.

   Найдем сторону треугольника XYZ.

Рассмотрим $\triangle DOP$. Его высота PK — это одна треть высоты $\triangle XYZ$. Так как $DO = DM - r = r\sqrt{12\frac{a^2}{b^2} - 3}$, то $PD = \sqrt{DO^2 - OP^2} = 2r\sqrt{3\frac{a^2}{b^2} - 1}$. Значит в треугольнике XYZ высота равна $3PD = 6r\sqrt{3\frac{a^2}{b^2} - 1}$, т.е. сторона XYZ равна $4\sqrt{3}r\sqrt{3\frac{a^2}{b^2} - 1}$, а его площадь $S_{XYZ} = 12\sqrt{3}r^2(3\frac{a^2}{b^2} - 1)$. Отсюда получаем

$$S_{PQR} = \frac{3\sqrt{3}(3a^2 - b^2)^2}{3b^2(\sqrt{12\frac{a^2}{b^2} - 3} + 1)^2}.$$

Ответ: а)

$$r = \frac{\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}b^2}}{\sqrt{12\frac{a^2}{b^2} - 3} + 1};$$

б)

$$S_{PQR} = \frac{3\sqrt{3}(3a^2 - b^2)^2}{3b^2(\sqrt{12\frac{a^2}{b^2} - 3} + 1)^2}.$$