ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2019-2020

Физика, II тур

РЕШЕНИЯ

11 класс

1. (25 баллов) При разрыве снаряда на поверхности земли осколки полетели во все стороны с одинаковой скоростью. В точку, находящуюся на расстоянии 250 м от места разрыва, упали два осколка с интервалом 10 с. Под какими углами к горизонту вылетели эти осколки? Чему равен радиус круга всех упавших осколков? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: Осколки вылетели под углами $\alpha_1 = 15°$ и $\alpha_2 = 75°$. Радиус круга равен 500 м.

Решение: Обозначим начальную скорость осколков через V_0, а углы вылета двух осколков через α_1 и α_2. Приравнивая дальности полета двух осколков

$$\frac{V_0^2 \sin 2\alpha_1}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha_2}{g},$$

получаем, что $\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2$ и, следовательно, $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$. Учитывая также, что дальность полета L можно записать через времена полета осколков $t_{1,2}$ как $L = V_0 \cos\alpha_1 t_1 = V_0 \cos\alpha_2 t_2$, получаем соотношение

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{V_0}\left(\frac{1}{\cos\alpha_2} - \frac{1}{\cos\alpha_1}\right),$$

которое, с учетом полученной выше связи между углами, преобразуем к виду

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{V_0}\left(\frac{1}{\sin\alpha_1} - \frac{1}{\cos\alpha_1}\right). \qquad (1)$$

Используя формулу для времени полета осколка, запишем еще одно соотношение

$$t_2 - t_1 = \frac{2V_0}{g}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1),$$

которое преобразуем к виду

$$t_2 - t_1 = \frac{2V_0}{g}(\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1), \qquad (2)$$

Перемножая формулы (1) и (2), исключаем неизвестную скорость V_0 и получаем уравнение для угла α_1:

$$\frac{g(t_2-t_1)^2}{2L} = \frac{(\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1)^2}{\sin\alpha_1 \cos\alpha_1}.$$

Подставляя численные значения $t_2 - t_1 = 10$ с, $L = 250$ м и $g = 10$ м/с^2, получаем

$$\frac{g(t_2-t_1)^2}{2L} = 2.$$

При этом уравнение для угла α_1 сводится к простому виду

$$\sin 2\alpha_1 = 0{,}5,$$

откуда получаем $2\alpha_1 = 30°$. Следовательно, $\alpha_1 = 15°$ и $\alpha_2 = 75°$.

Радиус круга всех упавших осколков равен дальности полета осколков, вылетевших под углом 45°, т.е.

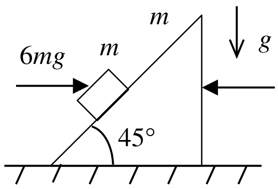
$$L_{\max} = \frac{V_0^2}{g}.$$

Поделив это соотношение на формулу для дальности полета осколков, вылетевших под углом α_1,

$$L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha_1}{g},$$

получаем $L_{\max} = L/\sin 2\alpha_1 = 2L = 500$ м.

2. (25 баллов) Брусок массы m находится на наклонной грани клина той же массы с углом 45° при основании, расположенного на горизонтальном столе. Коэффициент трения между бруском и телом равен 0,5, трение между клином и столом отсутствует. К бруску и клину во встречных направлениях приложены горизонтальные силы, величина одной из которых равна $6mg$, где g – ускорение свободного падения (см. рис.). Чему равна величина другой силы, если ускорение бруска направлено вертикально?



Ответ: Величина силы равна $7mg$.

Решение: Обозначив через N силу давления клина на брусок, а через μ коэффициент трения ($\mu = 0{,}5$), запишем второй закон Ньютона для бруска в проекции на горизонтальную ось

$$0 = 6mg - N\frac{\sqrt{2}}{2} - \mu N\frac{\sqrt{2}}{2}$$

и на вертикальную (направленную вверх) ось

$$ma_1 = N\frac{\sqrt{2}}{2} - \mu N\frac{\sqrt{2}}{2} - mg,$$

где a_1 – ускорение бруска. В записанных соотношениях учтено, что ускорение бруска направлено по вертикали (вверх) и сила трения скольжения равна μN и направлена вдоль наклонной грани клина (вниз). Второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальную (направленную влево) ось запишем в виде

$$ma_2 = F - N\frac{\sqrt{2}}{2} - \mu N\frac{\sqrt{2}}{2},$$

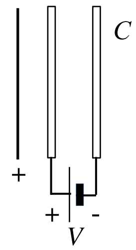
где a_2 – ускорение клина. Из условия равенства проекций ускорений бруска и клина на ось, перпендикулярную наклонной грани клина (кинематическая связь), следует, что

$$a_1 = a_2.$$

Из системы записанных уравнений находим, что $F = 7mg$. При этом $a_1 = a_2 = g$, $N = 4\sqrt{2}mg$.

Если предположить, что ускорение бруска направлено вниз, а ускорение клина вправо, то можно прийти к ответу $F = 24mg$. Получающиеся при этом отрицательные значения ускорений $a_1 = a_2 = -17g$ говорят об ошибочности предположения и неверности ответа $F = 24mg$.

3. (25 баллов) Плоский конденсатор емкости C подключен к батарее с напряжением V. После того, как к конденсатору поднесли пластину с равномерно распределенным по ней положительным зарядом (см. рис.), напряженность электрического поля между пластиной и ближайшей обкладкой конденсатора стала равной напряженности поля внутри конденсатора. Какую работу совершила батарея? Чему равен заряд пластины, если она имеет те же размеры, что и обкладки конденсатора?

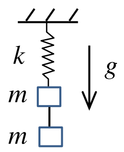


Ответ: Работа батареи равна $-CV^2$. Заряд пластины равен $2CV$.

Решение: При поднесении пластины к конденсатору на внешних поверхностях его обкладок появляются заряды, поле которых компенсирует поле пластины внутри обкладок и между обкладками конденсатора. Заряды на внутренних поверхностях обкладок не меняются и равны $\pm CV$. Поскольку напряженность электрического поля одинакова слева и справа от левой обкладки, заряды на поверхностях этой обкладки равны по величине и противоположны по знаку. Таким образом, на внешней поверхности левой обкладки появляется заряд $-CV$, который приходит туда через батарею с внешней поверхности правой обкладки (где остается заряд CV). При этом батарея совершает работу $-CV^2$.

Чтобы найти заряд пластины, рассмотрим точку внутри одной из обкладок конденсатора, где поле равно нулю. В этой точке поле пластины компенсируется суммарным полем зарядов $\pm CV$, расположенных на внешних обкладках конденсатора. Следовательно, заряд пластины вдвое превышает заряд CV, т.е. равен $2CV$.

4. (25 баллов) На пружине жесткости k висит груз массы m, к которому прикрепляют висящий на нити груз той же массы (см. рис.) и отпускают без толчка. Считая, что предельное натяжение нити равно $5mg/4$, где g – ускорение свободного падения, найти время, через которое нить оборвется, и максимальное удлинение пружины.



Ответ: Нить оборвется через время $\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}}$. Максимальное удлинение пружины равно $\left(1 + \sqrt{\frac{21}{8}}\right)\frac{mg}{k}$.

Решение: Направим ось x вниз и примем, что в начальный момент $x = 0$ для верхнего груза. Если бы нить не обрывалась, то движение грузов представляло бы собой гармонические колебания около положения равновесия $x = mg/k$ (отсчет ведем по верхнему грузу), в котором сила упругости, равная $-k(x + mg/k)$, уравновешивает силу тяжести $2mg$. При этом координата верхнего груза изменялась бы во времени по закону

$$x(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k}\cos\omega t,$$

где $\omega = \sqrt{k/(2m)}$, а его скорость и ускорение, соответственно, как

$$v_x(t) = g\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\omega t, \quad a_x(t) = \frac{g}{2}\cos\omega t.$$

Зависимость силы натяжения нити T от времени проще всего найти из второго закона Ньютона для нижнего груза (ускорения обоих грузов, если нить не оборвалась, одинаковы):

$$T = mg - ma_x = mg(1 - 0{,}5\cos\omega t).$$

Отсюда видно, что сила T достигает предельного значения $5mg/4$ при $\cos \omega t = -0{,}5$, т.е. в момент времени $t_1 = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}}$. В этот момент нить рвется и нижний груз отрывается. Дальнейшее движение верхнего груза представляет собой гармонические колебания

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$$

с угловой частотой $\Omega = \sqrt{k/m}$ и амплитудой и фазой, определяемыми значениями координаты и скорости груза в момент t_1:

$$x(t_1) = \frac{3mg}{2k}, \qquad v_x(t_1) = g\sqrt{\frac{3m}{8k}}.$$

Таким образом, получаем уравнения

$$A\cos(\Omega t_1 + \varphi) = \frac{3mg}{2k}, \qquad A\sin(\Omega t_1 + \varphi) = -\frac{g}{\Omega}\sqrt{\frac{3m}{8k}}.$$

Возводя уравнения в квадрат и складывая, находим амплитуду

$$A = \sqrt{\frac{21}{8}}\frac{mg}{k}.$$

Максимальное удлинение пружины равно

$$mg + A = \left(1 + \sqrt{\frac{21}{8}}\right)\frac{mg}{k}.$$

10 класс

1. (25 баллов) При разрыве снаряда на поверхности земли осколки полетели во все стороны с одинаковой скоростью. В точку, находящуюся на расстоянии 250 м от места разрыва, упали два осколка с интервалом 10 с. Под какими углами к горизонту вылетели эти осколки? Чему равен радиус круга всех упавших осколков? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: Осколки вылетели под углами $\alpha_1 = 15°$ и $\alpha_2 = 75°$. Радиус круга равен 500 м.

Решение: Обозначим начальную скорость осколков через V_0, а углы вылета двух осколков через α_1 и α_2. Приравнивая дальности полета двух осколков

$$\frac{V_0^2\sin 2\alpha_1}{g} = \frac{V_0^2\sin 2\alpha_2}{g},$$

получаем, что $\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2$ и, следовательно, $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$. Учитывая также, что дальность полета L можно записать через времена полета осколков $t_{1,2}$ как $L = V_0\cos\alpha_1 t_1 = V_0\cos\alpha_2 t_2$, получаем соотношение

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{V_0}\left(\frac{1}{\cos\alpha_2} - \frac{1}{\cos\alpha_1}\right),$$

которое, с учетом полученной выше связи между углами, преобразуем к виду

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{V_0}\left(\frac{1}{\sin\alpha_1} - \frac{1}{\cos\alpha_1}\right). \qquad (1)$$

Используя формулу для времени полета осколка, запишем еще одно соотношение

$$t_2 - t_1 = \frac{2V_0}{g}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1),$$

которое преобразуем к виду

$$t_2 - t_1 = \frac{2V_0}{g}(\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1), \qquad (2)$$

Перемножая формулы (1) и (2), исключаем неизвестную скорость V_0 и получаем уравнение для угла α_1:

$$\frac{g(t_2 - t_1)^2}{2L} = \frac{(\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1)^2}{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}.$$

Подставляя численные значения $t_2 - t_1 = 10$ с, $L = 250$ м и $g = 10$ м/с^2, получаем

$$\frac{g(t_2 - t_1)^2}{2L} = 2.$$

При этом уравнение для угла α_1 сводится к простому виду

$$\sin 2\alpha_1 = 0{,}5,$$

откуда получаем $2\alpha_1 = 30°$. Следовательно, $\alpha_1 = 15°$ и $\alpha_2 = 75°$.

Радиус круга всех упавших осколков равен дальности полета осколков, вылетевших под углом 45°, т.е.

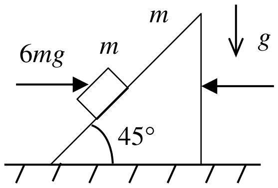
$$L_{\max} = \frac{V_0^2}{g}.$$

Поделив это соотношение на формулу для дальности полета осколков, вылетевших под углом α_1,

$$L = \frac{V_0^2\sin 2\alpha_1}{g},$$

получаем $L_{\max} = L/\sin 2\alpha_1 = 2L = 500$ м.

2. (25 баллов) Брусок массы m находится на наклонной грани клина той же массы с углом 45° при основании, расположенного на горизонтальном столе. Коэффициент трения между бруском и клином равен 0,5, трение между клином и столом отсутствует. К бруску и клину во встречных направлениях приложены горизонтальные силы, величина одной из которых равна $6mg$, где g – ускорение свободного падения (см. рис.). Чему равна величина другой силы, если ускорение бруска направлено вертикально?



Ответ: Величина силы равна $7mg$.

Решение: Обозначив через N силу давления клина на брусок, а через μ коэффициент трения (μ = 0,5), запишем второй закон Ньютона для бруска в проекции на горизонтальную ось

$$0 = 6mg - N\frac{\sqrt{2}}{2} - \mu N\frac{\sqrt{2}}{2}$$

и на вертикальную (направленную вверх) ось

$$ma_1 = N\frac{\sqrt{2}}{2} - \mu N\frac{\sqrt{2}}{2} - mg,$$

где a_1 – ускорение бруска. В записанных соотношениях учтено, что ускорение бруска направлено по вертикали (вверх) и сила трения скольжения равна μN и направлена вдоль наклонной грани клина (вниз). Второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальную (направленную влево) ось запишем в виде

$$ma_2 = F - N\frac{\sqrt{2}}{2} - \mu N\frac{\sqrt{2}}{2},$$

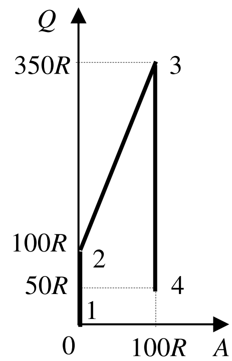
где a_2 – ускорение клина. Из условия равенства проекций ускорений бруска и клина на ось, перпендикулярную наклонной грани клина (кинематическая связь), следует, что

$$a_1 = a_2.$$

Из системы записанных уравнений находим, что $F = 7mg$. При этом $a_1 = a_2 = g$, $N = 4\sqrt{2}mg$.

Если предположить, что ускорение бруска направлено вниз, а ускорение клина вправо, то можно прийти к ответу $F = 24mg$. Получающиеся при этом отрицательные значения ускорений $a_1 = a_2 = -17g$ говорят об ошибочности предположения и неверности ответа $F = 24mg$.

3. (25 баллов) В ходе некоторого процесса 1-2-3-4 полученное одним молем идеального одноатомного газа тепло Q и совершенная газом работа A изменялись так, как показано на рисунке (R – молярная газовая постоянная). Найти разность максимальной и минимальной температур газа в ходе процесса. Найти изменение температуры газа в результате процесса.



Ответ: Разность максимальной и минимальной температур равна 200 К. Изменение температуры в результате процесса равно $-\frac{100}{3}$ К.

Решение: По первому принципу термодинамики приращение внутренней энергии газа на участках находится как разность между полученным на участке теплом ΔQ и работой:

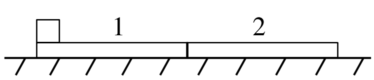
$$\Delta U = \Delta Q - A.$$

Учитывая, что $\Delta U = \frac{3}{2}R\Delta T$, где ΔT – изменение температуры газа, находим изменения температуры газа на каждом участке:

$$\Delta T_{12} = \frac{200}{3}\text{ К}, \qquad \Delta T_{23} = 100\text{ К}, \qquad \Delta T_{34} = -200\text{ К}.$$

Заключаем, что температура максимальна в точке 3 и минимальна в точке 4, разница максимальной и минимальной температур равна 200 К. Изменение температуры газа в результате всего процесса равно $\frac{200}{3} + 100 - 200 = -\frac{100}{3}$ К.

4. (25 баллов) Две одинаковые доски лежат на гладком горизонтальном столе, соприкасаясь торцами (см. рис.). Брусок, масса которого равна массе доски, толкают вдоль досок с конца доски 1 с такой скоростью, что он, проскользив по обеим доскам, остается на конце доски 2. Какая часть первоначальной кинетической энергии бруска выделилась в виде тепла? Чему равно отношение работ, совершенных над бруском досками 1 и 2?



Ответ: В виде тепла выделилось 4/7 первоначальной кинетической энергии бруска. Отношение работы доски 1 к работе доски 2 равно $\frac{16}{13+5\sqrt{7}} \approx 0{,}6$.

Решение: Обозначим через V_0 начальную скорость бруска, через V_1 его скорость после прохождения первой доски, через V_2 скорость первой доски после прохождения по ней бруска и через V_3 скорость бруска и второй доски после остановки бруска на доске. Задачу удобно решать, рассматривая относительное движение бруска и досок. При движении бруска по доскам на него действует сила трения величины μmg (μ - коэффициент трения между бруском и доской, m – масса бруска, g – ускорение свободного падения), которая замедляет брусок с ускорением μg. При движении бруска по доске 1 та же сила трения разгоняет обе доски с ускорением $0{,}5\mu g$ (суммарная масса досок вдвое больше массы бруска). Таким образом, при движении бруска по доске 1 относительное ускорение бруска и досок равно $1{,}5\mu g$. При этом относительная скорость бруска и досок меняется от V_0 в начале движения до $V_1 - V_2$ в конце движения по доске 1. Можно записать соотношение

$$(V_1 - V_2)^2 - V_0^2 = -2 \cdot 1{,}5\mu gL,$$

где L – длина доски. При движении бруска по доске 2 она разгоняется с ускорением μg, и относительное ускорение бруска и доски равно $2\mu g$. Относительная скорость меняется от $V_1 - V_2$ до 0. При этом справедливо соотношение

$$-(V_1 - V_2)^2 = -2 \cdot 2\mu gL.$$

Складывая записанные соотношения, находим, что

$$V_0^2 = 7\mu gL,$$

а затем, используя полученную формулу и любое из записанных соотношений, получаем связь скоростей в виде

$$V_1 - V_2 = \frac{2}{\sqrt{7}}V_0.$$

Записывая далее закон сохранения импульса для взаимодействия бруска сначала с досками 1 и 2, а затем с доской 2, получаем следующие соотношения:

$$V_0 = V_1 + 2V_2, \qquad V_1 + V_2 = 2V_3.$$

Поученные уравнения связи между скоростями позволяют выразить скорости как

$$V_1 = \frac{\sqrt{7}+4}{3\sqrt{7}}V_0, \quad V_2 = \frac{\sqrt{7}-2}{3\sqrt{7}}V_0, \quad V_3 = \frac{\sqrt{7}+1}{3\sqrt{7}}V_0.$$

Выделившееся тепло равно убыли кинетической энергии системы:

$$Q = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{mV_2^2}{2} - \frac{2mV_3^2}{2}.$$

Проще, однако, рассчитать Q как взятую с обратным знаком работу действующей на кубик силы трения при его суммарном перемещении $2L$ относительно досок 1 и 2:

$$Q = 2\mu mgL = \frac{4}{7}\frac{mV_0^2}{2}.$$

Как видно, выделившееся тепло составляет 4/7 первоначальной кинетической энергии бруска $mV_0^2/2$.

Работу доски 1 над бруском записываем через изменение его кинетической энергии как

$$A_1 = \frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -8\frac{5-\sqrt{7}}{63}\frac{mV_0^2}{2}.$$

Работу доски 2 над бруском записываем через изменение его кинетической энергии как

$$A_2 = \frac{mV_3^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = -\frac{5+2\sqrt{7}}{21}\frac{mV_0^2}{2}.$$

Отношение работ равно $\frac{A_1}{A_2} = \frac{16}{13+5\sqrt{7}} \approx 0{,}6$.

9 класс

1. (25 баллов) При разрыве снаряда на поверхности земли осколки полетели во все стороны с одинаковой скоростью. В точку, находящуюся на расстоянии 250 м от места разрыва, упали два осколка с интервалом 10 с. Под какими углами к горизонту вылетели эти осколки? Чему равен радиус круга всех упавших осколков? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: Осколки вылетели под углами $\alpha_1 = 15°$ и $\alpha_2 = 75°$. Радиус круга равен 500 м.

Решение: Обозначим начальную скорость осколков через V_0, а углы вылета двух осколков через α_1 и α_2. Приравнивая дальности полета двух осколков

$$\frac{V_0^2 \sin 2\alpha_1}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha_2}{g},$$

получаем, что $\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2$ и, следовательно, $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$. Учитывая также, что дальность полета L можно записать через времена полета осколков $t_{1,2}$ как $L = V_0 \cos\alpha_1 t_1 = V_0 \cos\alpha_2 t_2$, получаем соотношение

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{V_0}\left(\frac{1}{\cos\alpha_2} - \frac{1}{\cos\alpha_1}\right),$$

которое, с учетом полученной выше связи между углами, преобразуем к виду

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{V_0}\left(\frac{1}{\sin\alpha_1} - \frac{1}{\cos\alpha_1}\right). \qquad (1)$$

Используя формулу для времени полета осколка, запишем еще одно соотношение

$$t_2 - t_1 = \frac{2V_0}{g}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1),$$

которое преобразуем к виду

$$t_2 - t_1 = \frac{2V_0}{g}(\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1), \qquad (2)$$

Перемножая формулы (1) и (2), исключаем неизвестную скорость V_0 и получаем уравнение для угла α_1:

$$\frac{g(t_2-t_1)^2}{2L} = \frac{(\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1)^2}{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}.$$

Подставляя численные значения t_2 - t_1 = 10 с, L = 250 м и g = 10 м/с^2, получаем

$$\frac{g(t_2-t_1)^2}{2L} = 2.$$

При этом уравнение для угла α_1 сводится к простому виду

$$\sin 2\alpha_1 = 0{,}5,$$

откуда получаем $2\alpha_1 = 30°$. Следовательно, $\alpha_1 = 15°$ и $\alpha_2 = 75°$.

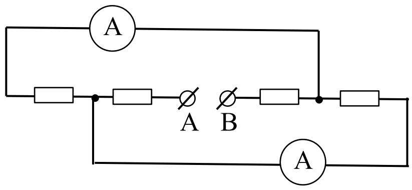
Радиус круга всех упавших осколков равен дальности полета осколков, вылетевших под углом 45°, т.е.

$$L_{\max} = \frac{V_0^2}{g}.$$

Поделив это соотношение на формулу для дальности полета осколков, вылетевших под углом α_1,

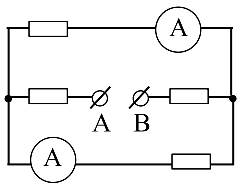
$$L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha_1}{g},$$

получаем $L_{\max} = L/\sin 2\alpha_1 = 2L$ = 500 м.



2. (25 баллов) В схеме, приведенной на рисунке, два резистора имеют сопротивления по 30 Ом и два – по 60 Ом; сопротивления амперметров пренебрежимо малы. После подключения к точкам А и В источника постоянного напряжения токи через амперметры оказались различными, меньший равен 1 А. Найти напряжение источника.

Ответ: Напряжение источника равно 330 В.



Решение: Схему цепи удобно перерисовать так, как показано на рисунке. Верхняя, средняя и нижняя ветви цепи включены параллельно, поэтому напряжения на них одинаковы. Поскольку показания амперметров различны, сопротивления резисторов в верхней и нижней ветвях также различны, причем последовательно с амперметров, показывающим меньший ток 1 А, включен резистор с большим сопротивлением 60 Ом. Находим напряжение на этом резисторе – оно равно 60 В. Поскольку напряжение на амперметре пренебрежимо мало (в силу малости его сопротивления), таким же является и напряжение на всей ветви (например, верхней), содержащей резистор 60 Ом и амперметр, а значит и на остальных (подключенных параллельно) ветвях. Отсюда находим, что через нижнюю ветвь, содержащую резистор с сопротивлением 30 Ом, протекает ток 2 А. Ток в средней ветви равен сумме токов в верхней и нижней ветвях, т.е. составляет 3 А. При этом на резисторах 30 и 60 Ом в средней ветви падают напряжения 90 и 180 В соответственно, т.е. в сумме 270 В. Напряжение источника находим как 270 + 60 = 330 В.

3. (25 баллов) Тонкостенный шар плавает в воде, погрузившись на треть своего объема. Через образовавшуюся течь в шар начинает поступать вода. Разница уровней воды снаружи и внутри шара сначала уменьшается, а затем растет. Считая объем шара равным V, найти объем воды, поступившей в шар к моменту, когда разница уровней воды снаружи и внутри шара становится минимальной. Найти объем поступившей воды, при котором шар утонет.

Ответ: Объем поступившей в шар воды равен $V/3$. Шар утонет при заполнении водой объема $2V/3$.

Решение: Вес поступающей в шар воды компенсируется возрастанием силы Архимеда за счет большего погружения шара. Толщина слоя воды в шаре растет быстрее со временем, чем глубина погружения шара, пока площадь зеркала воды внутри шара меньше площади сечения шара на уровне воды снаружи. При этом разница уровней воды снаружи и внутри уменьшается. После того, как площадь зеркала воды внутри шара сравняется с площадью сечения шара на уровне воды снаружи, разница уровней начнет возрастать.

Чтобы выразить сказанное математически, обозначим через $v_{\text{пост.}}$ объем поступившей в шар воды, а через $v_{\text{погр.}}$ объем погруженной части шара. Запишем условие плавания шара в виде

$$v_{пост.} + V/3 = v_{погр.},$$

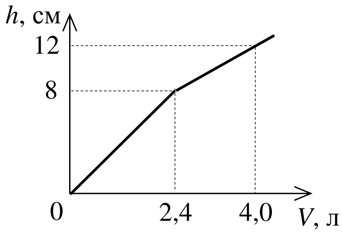
где учтено, что вес оболочки шара компенсируется погружением 1/3 объема шара. Условие равенства площади зеркала воды внутри шара и площади сечения шара на уровне воды снаружи можно записать в виде

$$v_{пост.} + v_{погр.} = V.$$

Из составленных уравнений находим $v_{пост.} = V/3$.

Чтобы найти объем $v_{пост.}$, при котором шар утонет, положим $v_{погр.} = V$ в условии плавания. В результате получим $v_{пост.} = 2V/3$.

4. (25 баллов) В цилиндрический сосуд, на дне которого лежит куб, начинают наливать воду. График зависимости высоты h уровня воды в сосуде от объема V налитой воды приведен на рисунке. Найти плотность материала куба.

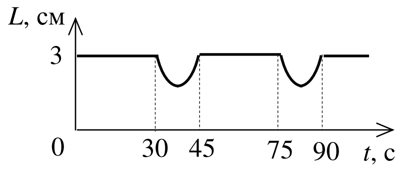


Ответ: Плотность материала куба равна 800 кг/м^3.

Решение: Обозначим через $S_д$ площадь дна сосуда, а через $S_к$ площадь основания куба. Участок графика 0-2,4 л соответствует заполнению объема над незанятой кубом частью площади дна $S_д$ - $S_к$ до уровня 8 см. Находим $S_д - S_к$ = 2,4 л : 0,8 дм = 3 дм^2. Поскольку на участке 2,4-4,0 л уровень воды растет медленнее, то вода начинает заполняет объем с большей площадью основания $S_д$. Это возможно в двух случаях: либо уровень воды поднимается выше кубика, либо кубик начинает плавать, и вода занимает объем под ним. В любом случае, получаем $S_д$ = (4,0 - 2,4) л : 0,4 дм = 4 дм^2. Используя ранее найденное значение $S_д$ - $S_к$ = 3 дм^2, находим, что $S_к$ = 1 дм^2, т.е. ребро куба равно 1 дм. Поскольку эта величина больше 8 см, приходим к выводу, что при h = 8 см куб начал всплывать. Поскольку при этом погруженный объем куба составляет 0,8 объема куба, плотность материала куба равна 0,8 плотности воды, т.е. 800 кг/м^3.

8 класс

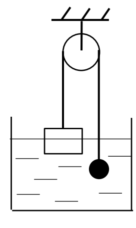
1. (30 баллов) Два жучка одновременно начинают равномерное движение по сторонам квадрата. График зависимости расстояния L между жучками от времени t приведен на рисунке. Найти скорости жучков и длину стороны квадрата.



Ответ: Скорости жучков одинаковы и равны 2 мм/с. Длина стороны квадрата равна 9 см.

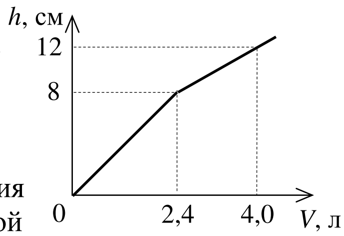
Решение: Приведенный график зависимости $L(t)$ возможен только в том случае, когда скорости жучков одинаковы по величине, жучки обегают квадрат в одном направлении и расстояние между ними меньше стороны квадрата. При этом участки с постоянным значением L = 3 см соответствуют движению жучков по одной стороне квадрата, а участки с переменным расстоянием $L(t)$ соответствуют движению по разным (смежным) сторонам. Из графика можно понять, что жучки проходят через одну и ту же вершину квадрата с интервалом в 15 с. Поскольку расстояние между жучками на одной стороне равно 3 см, то скорость жучка находится как 3 см : 15 с = 2 мм/с. Из графика также следует, жучок пробегает сторону квадрата за 45 с. Тогда длина стороны находится как 2 мм/с · 45 с = 9 см.

2. (40 баллов) На концах переброшенной через блок нити уравновешены полностью погруженный в воду шар массой 0,5 кг и частично погруженный кусок льда массой 2 кг (см. рис.). Шар и лед не касаются дна сосуда. На сколько изменится масса льда, находящегося выше уровня воды, к моменту, когда в результате таяния льда равновесие нарушится и шар станет падать на дно? Плотность материала шара 5000 кг/м^3, плотность льда 900 кг/м^3, плотность воды 1000 кг/м^3. Считать, что конец нити все время остается вмороженным в лед.



Ответ: Масса льда, находящегося выше уровня воды, уменьшится на 160 г.

Решение: Объем шара равен 0,5 кг : 5000 кг/м^3 = 10^{-4} м^3 = 0,1 л. Действующая на него сила Архимеда равна 1 Н. Действующая на шар сила тяжести равна 0,5 кг · 10 м/с^2 = 5 Н. Из условия равновесия шара находим силу натяжения нити: 5 - 1 = 4 Н. Такая же сила действует со стороны нити на лед. Действующая на лед сила тяжести равна 2 кг · 10 м/с^2 = 20 Н. Из условия равновесия льда находим действующую на лед силу Архимеда: 20 - 4 = 16 Н. Следовательно, объем погруженной части льда равен 16 Н : 1000 кг/м^3 : 10 м/с^2 = $1{,}6\cdot10^{-3}$ м^3 = 1,6 л. Масса погруженной части льда равна $1{,}6\cdot10^{-3}$ м^3 · 900 кг/м^3 = 1,44 кг, а над водой находится 2 - 1,44 = 0,56 кг льда. Шар начнет падать после того, как весь лед окажется над водой, имея массу 0,4 кг (сила тяжести 4 Н). К этому моменту масса льда над водой изменится на 0,56 - 0,4 = 0,16 кг.



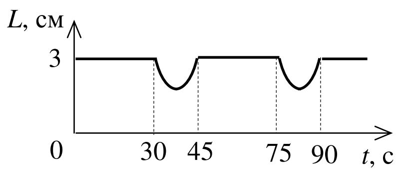
3. (30 баллов) В цилиндрический сосуд, на дне которого лежит куб, начинают наливать воду. График зависимости высоты h уровня воды в сосуде от объема V налитой воды приведен на рисунке. Найти длину ребра куба.

Ответ: Длина ребра куба равна 10 см.

Решение: Обозначим через $S_д$ площадь дна сосуда, а через $S_к$ площадь основания куба. Участок графика 0-2,4 л соответствует заполнению объема над незанятой кубом частью площади дна $S_д$ - $S_к$ до уровня 8 см. Находим $S_д$ - $S_к$ = 2,4 л : 0,8 дм = 3 дм^2. Поскольку на участке 2,4-4,0 л уровень воды растет медленнее, вода начинает заполняет объем с большей площадью основания $S_д$. Это возможно в двух случаях: либо уровень воды поднимается выше куба, либо куб начинает плавать, и вода занимает объем под ним. В любом случае, получаем $S_д$ = (4,0 – 2,4) л : 0,4 дм = 4 дм^2. Используя ранее найденное значение $S_д$ - $S_к$ = 3 дм^2, находим, что $S_к$ = 1 дм^2, т.е. ребро куба равно 1 дм. Поскольку эта величина больше 8 см, приходим к выводу, что при h = 8 см куб начал всплывать.

7 класс

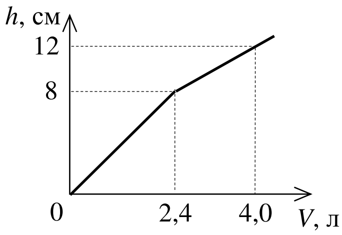
1. (30 баллов) Два жучка одновременно начинают равномерное движение по сторонам квадрата. График зависимости расстояния L между жучками от времени t приведен на рисунке. Найти скорости жучков и длину стороны квадрата.



Ответ: Скорости жучков одинаковы и равны 2 мм/с. Длина стороны квадрата равна 9 см.

Решение: Приведенный график зависимости $L(t)$ возможен только в том случае, когда скорости жучков одинаковы по величине, жучки обегают квадрат в одном направлении и расстояние между ними меньше стороны квадрата. При этом участки с постоянным значением L = 3 см соответствуют движению жучков по одной стороне квадрата, а участки с переменным расстоянием $L(t)$ соответствуют движению по разным (смежным) сторонам. Из графика можно понять, что жучки проходят через одну и ту же вершину квадрата с интервалом в 15 с. Поскольку расстояние между жучками на одной стороне равно 3 см, то скорость жучка находится как 3 см : 15 с = 2 мм/с. Из графика также следует, жучок пробегает сторону квадрата за 45 с. Тогда длина стороны находится как 2 мм/с · 45 с = 9 см.

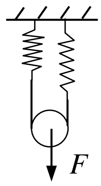
2. (30 баллов) В цилиндрический сосуд, на дне которого лежит куб, начинают наливать воду. График зависимости высоты h уровня воды в сосуде от объема V налитой воды приведен на рисунке. Найти длину ребра куба.

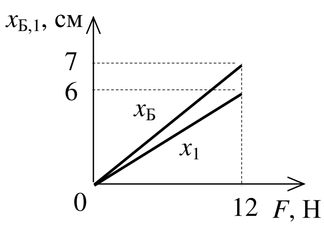


Ответ: Длина ребра куба равна 10 см.

Решение: Обозначим через $S_д$ площадь дна сосуда, а через $S_к$ площадь основания куба. Участок графика 0-2,4 л соответствует заполнению объема над незанятой кубом частью площади дна $S_д$ - $S_к$ до уровня 8 см. Находим $S_д$ - $S_к$ = 2,4 л : 0,8 дм = 3 дм^2. Поскольку на участке 2,4-4,0 л уровень воды растет медленнее, то вода начинает заполняет объем с большей площадью основания $S_д$. Это возможно в двух случаях: либо уровень воды поднимается выше куба, либо куб начинает плавать, и вода занимает объем под ним. В любом случае, получаем $S_д$ = (4,0 – 2,4) л : 0,4 дм = 4 дм^2. Используя ранее найденное значение $S_д$ - $S_к$ = 3 дм^2, находим, что $S_к$ = 1 дм^2, т.е. ребро куба равно 1 дм. Поскольку эта величина больше 8 см, приходим к выводу, что при h = 8 см куб начал всплывать.

3. (40 баллов) В системе, показанной на рисунке, концы подвешенных пружин соединены нитью, на которой висит блок. Блок начинают тянуть вниз с силой F, величину которой постепенно увеличивают. Используя график зависимости смещения блока $x_Б$ и конца одной из пружин x_1 от величины F (см. рис.), найти коэффициенты жесткости пружин.





Ответ: Коэффициенты жесткости первой и второй пружин равны 1 Н/см и 0,75 Н/см соответственно.

Решение: Из условия равновесия блока следует, что сила натяжения нити равна $F/2$. Тогда жесткость первой пружины находится как $k_1 = (F/2) : x_1$ = (12/2) Н : 6 см = 1 Н/см. Смещение блока $x_Б$ связано с растяжениями пружин x_1 и x_2 как $x_Б = (x_1 + x_2)/2$. Отсюда получаем, что $x_2 = 2x_Б - x_1$. В частности, $x_2 = 2\cdot 7 - 6 = 8$ см при F = 12 Н. Тогда жесткость второй пружины находится как $k_2 = (F/2) : x_2$ = (12/2) Н : 8 см = 3/4 Н/см.